SỞ GDĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN NGUYỄN TRÃI LẦN THỨ II
NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm có 02 trang)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Có hai hộp đựng bóng. Hộp thứ nhất chứa 6 quả bóng màu đỏ, được đánh số từ 1 đến 6; hộp thứ hai chứa 8 quả bóng màu xanh, được đánh số từ 1 đến 8. Bạn Hưng rút ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp thứ nhất, còn bạn Mai rút ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp thứ hai. Hãy tính xác suất để số trên quả bóng mà Hưng chọn lớn hơn số trên quả bóng mà Mai chọn.

b) Trong một nhà xưởng, người ta sử dụng một robot dọn dẹp để cuốn gọn một sợi dây cáp dài 6m. Một đầu của sợi dây cáp được cố định tại điểm *A* của một thiết bị có dạng tam giác đều cạnh 1m. Ban đầu, robot giữ đầu còn lại của dây tại điểm *D* sao cho sợi dây luôn căng và ba điểm *D, A, B* thẳng hàng theo thứ tự đó (như hình minh họa). Sau đó, robot di chuyển theo chiều kim đồng hồ xung quanh thiết bị, luôn giữ cho sợi dây căng trong suốt quá trình để tránh bị rối. Hãy tính độ dài quãng đường mà robot đã di chuyển cho đến khi sợi dây cáp được quấn kín hoàn toàn quanh thiết bị, biết rằng vị trí của thiết bị không thay đổi trong suốt quá trình robot di chuyển.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y \\ \sqrt{x^2-2y+1}+\sqrt{y^2+2x+1}=x+y+1 \end{cases}$.

b) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}.\sqrt{b^2+a}=0$. Tính giá trị biểu thức $S=b\sqrt{a^2+b}+a\sqrt{b^2+a}$.

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O sao cho CD không phải đường kính. Đường thẳng AD và BC cắt nhau tại P sao cho A nằm giữa D và P, B nằm giữa C và P. Giả sử tam giác PCD nhọn và có trực tâm là H. Đường thẳng qua H và song song BD cắt BC tại E. Đường thẳng qua H song song AC cắt AD tại F.

a) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $IA.PC = ID.PA.$

b) Gọi HE cắt AC tại J, HF cắt BD tại Q. Chứng minh rằng $JQ \,//\, EF$.

c) Đường thẳng qua E vuông góc BC cắt AD tại L, đường thẳng qua F vuông góc AD cắt BC tại K. Chứng minh rằng L, O, K thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực dương $a, b, c.$ Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\geq 1.$$

Câu 5 (2,0 điểm).

a) Cho p là một số nguyên tố lẻ và các số nguyên dương a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn các số $ab+1, bc+1, ca+1$ đều chia hết cho $p.$ Chứng minh rằng $a+b+c \geq 3p+6.$

b) Cho 16 điểm xếp thành lưới 4×4 gồm bốn hàng, mỗi hàng có bốn điểm, trong đó khoảng cách giữa hai điểm kề nhau trên cùng một hàng hoặc một cột bất kỳ đều bằng 1 đơn vị. Hai bạn Việt và Nam chơi một trò chơi như sau: mỗi bạn luân phiên tô màu một điểm chưa được tô trong 16 điểm đã cho, Việt chơi trước và tô màu đỏ sao cho hai điểm đỏ bất kỳ có khoảng cách khác $\sqrt{5}$ đơn vị; Nam chơi sau và tô màu xanh. Tìm số điểm lớn nhất mà Việt chắc chắn có thể tô được.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: …………………………Số báo danh: ………………………

Chữ ký của giám thị 1: ……………………Chữ ký của giám thị 2: ……………

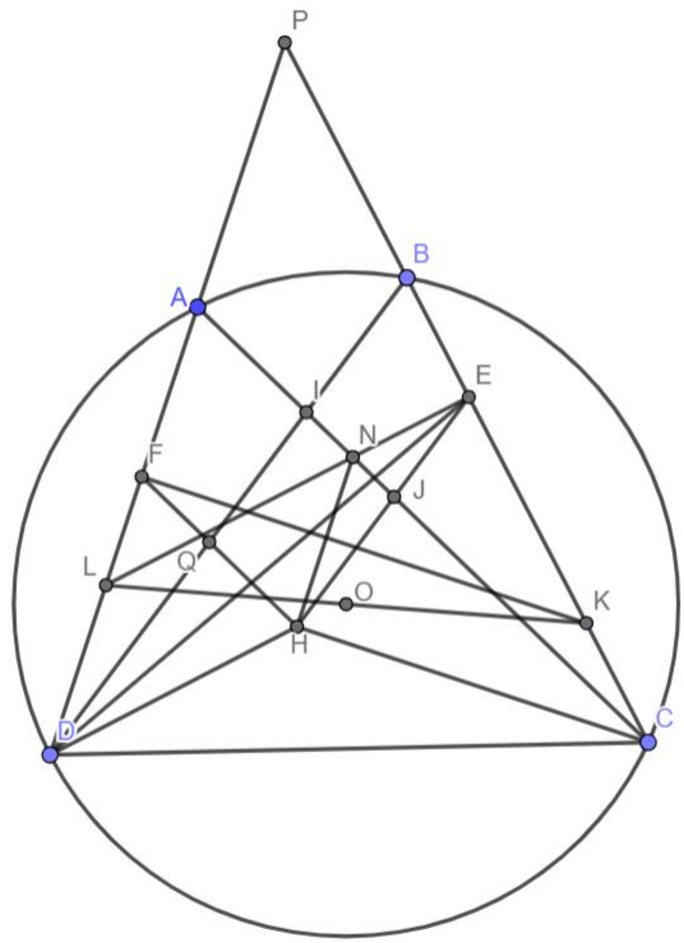
SỞ GDĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN NGUYỄN TRÃI LẦN THỨ II
NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Có hai hộp đựng bóng. Hộp thứ nhất chứa 6 quả bóng màu đỏ, được đánh số từ 1 đến 6; hộp thứ hai chứa 8 quả bóng màu xanh, được đánh số từ 1 đến 8. Bạn Hưng rút ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp thứ nhất, còn bạn Mai rút ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp thứ hai. Hãy tính xác suất để số trên quả bóng mà Hưng chọn lớn hơn số trên quả bóng mà Mai chọn.	
	Mỗi bạn chọn ngẫu nhiên 1 quả bóng đỏ và xanh, nên $n(\Omega)=6.8=48$.	0,25
	Ta đếm số trường hợp quả bóng của Hưng chọn có số lớn hơn của Mai. Với trường hợp Hưng chọn quả bóng số k ($1\le k\le 6$) thì số cách chọn của Mai để có số nhỏ hơn là $k-1$. Do đó số tổng số trường hợp thỏa mãn là 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15	0,5
	Xác suất là $\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$.	0,25
Câu 1	b) Trong một nhà xưởng, người ta sử dụng một robot dọn dẹp để cuốn gọn một sợi dây cáp dài 6m. Một đầu của sợi dây cáp được cố định tại điểm *A* của một thiết bị có dạng tam giác đều cạnh 1m. Ban đầu, robot giữ đầu còn lại của dây tại điểm *D* sao cho sợi dây luôn căng và ba điểm *D, A, B* thẳng hàng theo thứ tự đó (như hình minh họa). Sau đó, robot di chuyển theo chiều kim đồng hồ xung quanh thiết bị, luôn giữ cho sợi dây căng trong suốt quá trình để tránh bị rối. Hãy tính độ dài quãng đường mà robot đã di chuyển cho đến khi sợi dây cáp được quấn kín hoàn toàn quanh thiết bị, biết rằng vị trí của thiết bị không thay đổi trong suốt quá trình robot di chuyển.  	

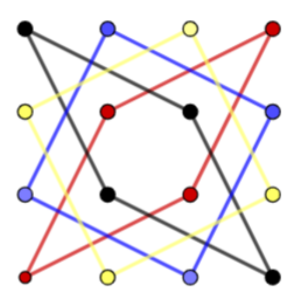
	Vì sợi dây luôn căng nên quỹ đạo robot đi sẽ là những cung tròn liên tiếp Cung tròn đầu tiên là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm A, bán kính $6m$, quãng đường $S_1 = \frac{2\pi}{3}.6 = 4\pi.$	0,25
	Cung tròn thứ hai là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm C, bán kính $5m.$ Cung tròn thứ ba là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm B, bán kính $4m.$ Cung tròn thứ tư là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm A, bán kính $3m.$ Cung tròn thứ năm là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm B, bán kính $2m.$ Cung tròn thứ sáu là cung tròn 120^0 của đường tròn tâm C, bán kính $1m.$ Và robot kết thúc quá trình di chuyển tại điểm A khi sợi dây đã quấn kín hoàn toàn quanh máy.	0,5
	Do đó độ dài quãng đường robot đi là: $\frac{2\pi}{3}.(6+5+4+3+2+1) = 14\pi$.	0,25
Câu 2	a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ \sqrt{x^2-2y+1} + \sqrt{y^2+2x+1} = x+y+1 \end{cases}$.	
	Điều kiện xác định: $x^2-2y+1 \geq 0$ và $y^2+2x+1 \geq 0.$ Có $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2.$ Và $x^2+xy+y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2.$ Suy ra $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq \lvert x+y \rvert \geq x+y.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$ và $x+y \geq 0$ hay $x=y \geq 0.$	0,5
	Với $x=y \geq 0,$ thay vào ta được: $\lvert x-1 \rvert + x+1 = 2x+1 \Leftrightarrow \lvert x-1 \rvert = x.$	0,25
	$\lvert x-1 \rvert = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=x \\ x-1=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=y=\frac{1}{2}.$	0,25

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="2">b) Cho hai số thực a,b thỏa mãn $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}.\sqrt{b^2+a}=0.$ Tính giá trị biểu thức $S=b\sqrt{a^2+b}+a\sqrt{b^2+a}.$</td></tr>
<tr><td>Có $ab+\sqrt{ab+1}=-\sqrt{a^2+b}.\sqrt{b^2+a}.$
Bình phương hai vế ta được
$a^2b^2+ab+1+2ab\sqrt{ab+1}=(a^2+b)(b^2+a)=a^2b^2+a^3+b^3+ab.$
Suy ra $1+2ab\sqrt{ab+1}=a^3+b^3.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Có $S^2=b^2(a^2+b)+a^2(b^2+a)+2ab.\sqrt{a^2+b}.\sqrt{b^2+a}$
$=2a^2b^2+a^3+b^3+2ab.(-ab-\sqrt{ab+1})$
$=a^3+b^3-2ab.\sqrt{ab+1}=1.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Từ $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}.\sqrt{b^2+a}=0$ dẫn đến $ab<0.$
Vai trò như sau giả sử $a>0>b.$
Suy ra $a^3>b^3,$ dẫn đến $a^2(b^2+a)>b^2(a^2+b)$ hay $\left|a\sqrt{b^2+a}\right|>\left|b\sqrt{a^2+b}\right|.$
Suy ra $a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}>0.$ Do đó $S=1.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Câu 3</td><td colspan="2">Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O sao cho CD không phải đường kính. Đường thẳng AD và BC cắt nhau tại P sao cho A nằm giữa D và $P;B$ nằm giữa C và P. Giả sử tam giác PCD nhọn và có trực tâm là H. Đường thẳng qua H và song song BD cắt BC tại E. Đường thẳng qua H song song AC cắt AD tại F.</td></tr>
</table>



a) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $IA.PC = ID.PA.$	
Tam giác IAB đồng dạng IDC (g.g), suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{AB}{CD}.$ Tam giác PAB đồng dạng PCD (g.g), suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{PA}{PC}.$ Do đó $\frac{IA}{ID} = \frac{PA}{PC}$ suy ra $IA.PC = ID.PA.$	1,0
b) Gọi HE cắt AC tại J, HF cắt BD tại Q. Chứng minh rằng $JQ \parallel EF$.	
Vì H là trực tâm tam giác PCD nên $\angle HDF = \angle HCE.$ Lại có $\angle HFD = \angle CAD = \angle DBC = \angle HEC.$	0,25
Suy ra tam giác HFD đồng dạng HEC (g.g), suy ra $\frac{HF}{HE} = \frac{DF}{CE}.$	0,25
Và $\angle FDQ = \angle ECJ$, suy ra tam giác QFD đồng dạng JEC (g.g), suy ra $\frac{QF}{JE} = \frac{FD}{EC}.$	0,25

	Từ đó suy ra $\frac{FQ}{EJ}=\frac{HF}{HE}$, suy ra $JQ \;//\; EF$.	0,25
	c) Đường thẳng qua E vuông góc BC cắt AD tại L, đường thẳng qua F vuông góc AD cắt BC tại K. Chứng minh rằng L,O,K thẳng hàng.	
	Vì $\angle LFK=\angle KEL=90^0$ nên L,K,E,F cùng thuộc đường tròn đường kính LK.	0,25
	Từ H kẻ đường thẳng song song AD cắt AC tại N. Khi đó $\angle HNC=\angle DAC=\angle DBC=\angle HEC$, suy ra $NECH$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Mà $\angle CHN=90^0$ nên $\angle CEN=90^0$, suy ra E,N,L thẳng hàng. Do $NL \;//\; DN$ và $HN \;//\; DL$ nên $NLDH$ là hình bình hành. Và $ANHF$ cũng là hình bình hành nên $AF=HN=DL$.	0,25
	Mà O thuộc đường trung trực của AD nên O thuộc đường trung trực của FL. Chứng minh tương tự ta có O thuộc đường trung trực EK. Suy ra O chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp $LKEF$ nên O thuộc đường thẳng LK.	0,25
Câu 4	Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng $$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right).\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\ge 1.$$	
	Có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{a^2+b^2+ac+bc}{(b+c)(c+a)}\ge\frac{(a+b)^2+2ac+2bc}{2(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b)(a+b+2c)}{2(b+c)(c+a)}$. Làm tương tự rồi nhân theo vế, ta được: VT $\ge\frac{(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b)}{8(a+b)(b+c)(c+a)}$.	0,5
	Đặt $a+b=x,b+c=y,c+a=z$. Biểu thức trên viết thành $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}$.	0,25
	Sử dụng BĐT Cauchy ta có: $x+y\ge 2\sqrt{xy};y+z\ge 2\sqrt{yz};z+x\ge 2\sqrt{zx}$. Nhân theo vế ta được $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}\ge 1$.	

	Do đó $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right).\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\geq 1.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z,$ tương đương với $a=b=c.$	0,25
Câu 5.	a) Cho p là một số nguyên tố lẻ và các số nguyên dương a,b,c đôi một phân biệt thỏa mãn các số $ab+1, bc+1, ca+1$ đều chia hết cho $p.$ Chứng minh rằng $a+b+c\geq 3p+6.$	
	Vai trò như nhau, giả sử $a>b>c.$ Vì $ab+1, ac+1 \vdots p$ nên $ab-ac \vdots p,$ hay $a(b-c) \vdots p.$ Mà $ab+1 \vdots p$ nên $a \not\vdots\, p.$ Suy ra $b-c \vdots p.$	0,25
	Dẫn đến $b-c\geq p,$ hay $b\geq c+p.$	0,25
	Làm tương tự ta được $a\geq b+p\geq c+2p.$ Suy ra $a+b+c\geq 3p+3c.$	0,25
	Nếu $c=1,$ thay vào ta được $b-c=b-1 \vdots p,$ và $bc+1=b+1 \vdots p.$ Suy ra $2 \vdots p,$ mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ. Do đó $c\geq 2,$ suy ra $a+b+c\geq 3p+6.$	0,25
	b) Cho 16 điểm xếp thành lưới 4×4 gồm bốn hàng, mỗi hàng có bốn điểm, trong đó khoảng cách giữa hai điểm kề nhau trên cùng một hàng hoặc một cột bất kỳ đều bằng 1 đơn vị. Hai bạn Việt và Nam chơi một trò chơi như sau: mỗi bạn luân phiên tô màu một điểm chưa được tô trong 16 điểm đã cho, Việt chơi trước và tô màu đỏ sao cho hai điểm đỏ bất kỳ có khoảng cách khác $\sqrt{5}$ đơn vị; Nam chơi sau và tô màu xanh. Tìm số điểm lớn nhất mà Việt chắc chắn có thể tô được.	
	Ta chứng minh Việt luôn có cách để tô được 4 điểm. Xét 8 điểm ở trên hàng đầu tiên và hàng cuối cùng, trong 8 điểm này không có hai điểm nào có khoảng cách bằng $\sqrt{5}.$ Vì Việt chơi trước, nên Việt luôn có thể tô được 4 trong 8 điểm này.	0,25
	Ta chứng minh 4 là số lớn nhất mà Việt chắc chắn có thể tô được, bằng cách chỉ ra chiến thuật của Nam để Việt không thể tô được 5 điểm. Phân hoạch 16 điểm thành 4 tập hợp tương ứng với 4 màu đen, xanh, vàng, đỏ như hình vẽ, các hình này có tâm đối xứng là tâm của hình vuông hình thành từ 16 điểm, và khoảng cách giữa hai đỉnh kề nhau trong cùng một tập bằng $\sqrt{5}.$ 	0,25

	Việt chơi trước, khi Việt tô màu điểm nào, Nam sẽ tô màu điểm đối xứng với điểm đó qua tâm đối xứng của hình vuông, cũng là điểm trong cùng một tập hợp với điểm của Việt chọn, khi đó 2 điểm còn lại trong tập hợp có khoảng cách tới điểm của Việt bằng $\sqrt{5}$ nên Việt không thể tô màu vào các điểm đó. Hay nói cách khác, Nam sẽ đánh chặn để khiến cho Việt chỉ có thể tô màu vào một điểm trong mỗi tập hợp. Do đó với chiến thuật này của Nam, Việt chỉ có thể tô màu tối đa được 4 điểm. Vậy đáp số của bài toán là 4 điểm.	0,5