

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho $x, y \geq 0$ và $x + 2y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = y + \sqrt{xy}$

b) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + \sqrt{zx}$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(2) = 4$ và $f(2) = 4$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) - 8f(x) + 17} - 1}{x^3 - 3x^2 + 4}$

b) Tìm tất cả các giá trị x trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn: $x^2 + 1 = 5^{2x-3}$

c) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log_5(\sqrt{a_n^2 + 1}) + \frac{3}{2}, n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC và điểm O tùy ý bên trong tam giác ABC. Gọi X thuộc mặt phẳng (SBC) sao cho OX song song SA, Y thuộc mặt phẳng (SAC) sao cho OY song song SB và Z thuộc mặt phẳng (SAB) sao cho OZ song song SC

a) Tính $S = \frac{OX}{SA} + \frac{OY}{SB} + \frac{OZ}{SC}$

b) Khi $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ$ và $SA = a, SB = 2a, SC = 3a$ và O là trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện O.XYZ theo a.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{C_n^k}$ với mọi $k \leq n$, k nguyên dương

b) $\sum_{i=0}^n \frac{1}{C_n^i} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi $E \equiv AC \cap BD$ và $F \equiv AB \cap CD$. Gọi F' là điểm đối xứng với F qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC. Chứng minh rằng O, E, F' thẳng hàng.