Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương	Đề thi năng khiếu lần 1 – Lớp 11 Toán Ngày 16 – 09 – 2019 – Thời gian 180 phút.

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ có đồ thị (C)

a. Gọi $x_1;x_2;x_3$ là hoành độ giao điểm của (C) với Ox. Tính giá trị biểu thức $T=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+4x_1^2x_2^2x_3^2$.

b. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$.

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}>2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$.

Bài 3. Cho tam giác $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh:

$2(\sin A+\sin B+\sin C)+\tan A+\tan B+\tan C>3\pi$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh a, góc $\angle A=60^0$. Cạnh $SC\perp(ABCD);SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(SCD)$.

Bài 5. Cho dãy số (u_n) có $u_1=0;u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{5-u_n};\forall n\geq 1$

a. Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b. Đặt $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k-3}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{5n+4}$.

Bài 6. Đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn:

$P^2(x)-P^2(y)=P(x+y).P(x-y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh $P(x)=ax$, với a là hằng số.

<u>**Hết**</u>

Đáp án đề thi NK môn toán lần 1

Lớp 11Toán, ngày 16.9.2019, 180'

① a) Xét pt $x^3-3x-1=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Theo định lý Viet, có

$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3$, $x_1x_2x_3=1$

Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Suy ra $T=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+4x_1^2x_2^2x_3^2$

$$=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3-3(x_1x_2+x_2x_3)(x_2x_3+x_3x_1)\times$$

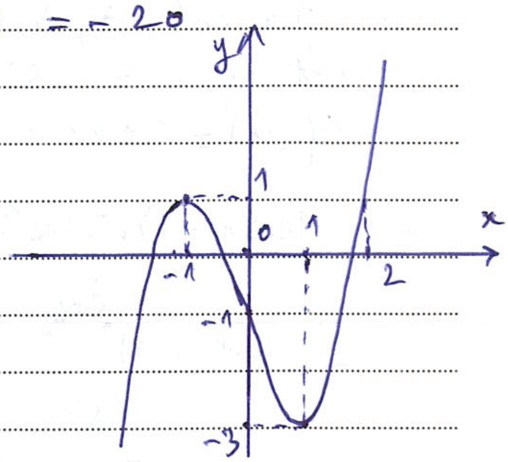
$$\times(x_3x_1+x_1x_2)+4(x_1x_2x_3)^2$$

$$=-27-3(-x_2^2)(-x_3^2)(-x_1^2)+4=-20$$

b) $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Ta có đồ thị (C): $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$



Xét pt $f(f(x))=0$

$\Leftrightarrow [f(x)]^3-3.f(x)-1=0$ (2)

Đặt $t=f(x)$, pt (2) $\to t^3-3t-1=0$

có 3 ng t_1, t_2, t_3 và $-2<t_1<-1<t_2<0<1<t_3<2$

* Nếu $f(x)=x^3-3x-1=t_1$: có 3 nghiệm p.b.
* Nếu $f(x)=x^3-3x-1=t_2$: có 3 nghiệm p.b
* Nếu $f(x)=x^3-3x-1=t_3$: có đúng 1 nghiệm

Vậy pt $f(f(x))=0$ có đúng 7 nghiệm p b

② Từ pt $x^3-y^3+3y^2-3x=2$

$\Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1)$

Xét $f(t)=t^3-3t$ có $f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)$

Điều kiện $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ y^2 - 2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$\rightarrow -1 \leq y-1 \leq 1$

$f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[-1;1]$

pt $\Leftrightarrow f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1 \rightarrow y = x+1$

Từ pt sau, có

$$x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2(x+1)-(x+1)^2} = -2$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 1-x^2 + 2\sqrt{1-x^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\rightarrow y = 1$. Hệ pt có nghiệm là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

3) Ta có $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Xét $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 = \dfrac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{(\cos x - 1)(2\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{(\cos x - 1)^2 (2\cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f(x) > f(0) = 0$

Áp dụng: Ta có

$f(A) = 2\sin A + \tan A - 3A > 0$

$\rightarrow 2\sin A + \tan A > 3A$. Tương tự, có

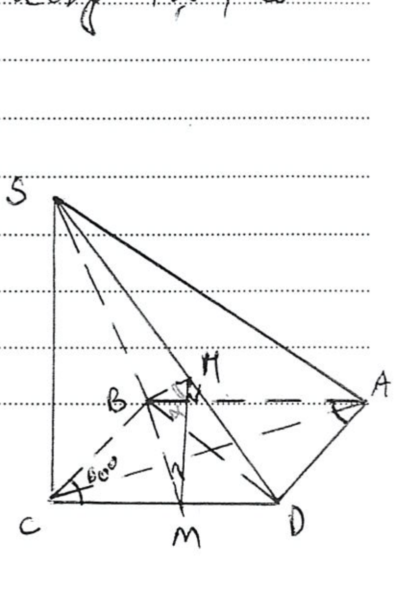
$2\sin B + \tan B > 3B$

$2\sin C + \tan C > 3C$

Cộng vế ba bđt, có đpcm

4) M là trung điểm CD, vì $\triangle BCD$ đều nên $BM \perp CD$

mà $BM \perp SC \rightarrow BM \perp SD$



Kẻ $BH \perp SD \to SD \perp (BHD) \to SD \perp (HM)$

$\to g(SBD, SCD) = \widehat{BHM} = \alpha$ và $BM \perp MH$

$SD = \sqrt{SC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$\Delta HMD \backsim \Delta CSD \to \frac{HM}{MD} = \frac{CS}{SD} = \frac{a\sqrt{6}/2}{a\sqrt{10}/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$\to HM = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{a}{2}$, $\tan\alpha = \frac{BM}{HM} = \frac{a\sqrt{3}/2}{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}} = \sqrt{5}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 6 \to \cos^2\alpha = \frac{1}{6} \to \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

5 a) Ta cm dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 bằng quy nạp theo n

Ta có $u_1 = 0 < 1$. g/sử $u_n < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Xét h/s $f(x) = \frac{x+3}{5-x}$ có $f'(x) = \frac{8}{(5-x)^2} > 0$ trên $(-\infty; 1)$

nên $f(x)$ đồng biến $\to u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1$

Vậy $u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $u_2 = \frac{3}{5} > u_1$. g/sử $u_n > u_{n-1}$, $n \geq 2$

do $u_n < 1$, $u_{n-1} < 1$ và $f(x)$ đồng biến trên $(\infty; 1)$

nên $u_{n+1} = f(u_n) > f(u_{n-1}) = u_n$

$\to$ Dãy (u_n) tăng, bị chặn trên, nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \leq 1 \to a = \frac{a+3}{5-a} \to \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \text{ loại} \end{array}\right.$

Vậy $\lim u_n = 1$

b) $u_k - 3 = \frac{4(u_{k-1} - 3)}{5 - u_{k-1}} \to \frac{1}{u_k - 3} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{u_{k-1} - 3} - 1\right)$, $k \geq 2$

$T_n = \frac{1}{u_1 - 3} + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k - 3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\left(2\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{u_{k-1} - 3} - n + 1\right)$

$= -\frac{1}{12} - \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}\left(T_n - \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{3}\right)$

$\rightarrow T_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n - \frac{1}{u_n - 3}$

$\frac{T_n}{5n+4} = -\frac{1+n}{2(5n+4)} - \frac{1}{(5n+4)(u_n-3)} \rightarrow -\frac{1}{10}$

Vậy $\lim \frac{T_n}{5n+4} = -\frac{1}{10}$

6) cho $x = y = 0 \rightarrow P(0) = 0$

Từ $P^2(x) - P^2(y) = P(x+y).P(x-y)\ \forall x, y \in R$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo x, có

$2P(x).P'(x) = P'(x+y).P(x-y) + P(x+y).P'(x-y)$

cho $x = y \rightarrow 2P(x).P'(x) = P(2x).P'(0)$ (2)

+ Nếu $P'(0) = 0$ thì $2P(x).P'(x) = 0\ \forall x \in R$.

$\rightarrow P(x)$ là hằng số và do $P(0) = 0$ nên

$P(x) = 0\ \forall x \in R$

+ Nếu $P'(0) \neq 0$: đa thức $P(x)$ có bậc n thì vế trái của (2) là đa thức bậc $2n-1$, còn vế phải của (2) là đa thức bậc n

$\Rightarrow 2n - 1 = n \rightarrow n = 1$

Vì $P(0) = 0 \rightarrow P(x) = ax$ với a là hằng số

7) $2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 = (x+2)(2x^2 - x + 8)$

$\rightarrow$ đk $-2 \leq x \leq 4$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên $[-2; 4]$

có $f'(x) = \frac{3x^2 + 3x + 3}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0\ \forall x \in [-2; 4)$

$\rightarrow$ h/s đồng biến trên $[-2; 4]$

Lại có $f(1) = 2\sqrt{3}$

Bpt $\Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$