SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ HAI
NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán 11
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = \frac{1}{2};\, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + 4x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) tăng và $\lim x_n = +\infty$.

b) Tính $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2022^x + 1 = 2023^y$.

b) Cho 2023 số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ và số nguyên $a > 1$ sao cho $a \vdots a_1.a_2 \ldots a_{2023}$. Chứng minh rằng $\left(a^{2024} + a - 1\right) \vdots \left(a + a_1 - 1\right).\left(a + a_2 - 1\right) \ldots \left(a + a_{2023} - 1\right)$.

Câu 3. (1,5 điểm)

Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(2x + y + f(x+y)\right) + f(xy) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \ (*)$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là toàn ánh nếu $f(0) \neq 0$.

b) Cho $f(0) = 0$. Tìm tất cả các $f(x)$ thỏa mãn.

Câu 4. (2 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và $\hat{A} = 45^o$. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Gọi K là trực tâm tam giác AEF và đường tròn (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC; đường thẳng CK cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai G, đường thẳng IG cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EKFC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{IMC} = \widehat{KGJ} = 45^o$.

Câu 5. (2 điểm) Một bác nông dân đi vào rừng nhặt được 223 hạt dẻ. Bác ấy muốn chia số hạt dẻ nhặt được cho 5 con sóc sao cho con nào cũng nhận được ít nhất một hạt.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia để có một con sóc nhận được số hạt dẻ nhiều hơn tổng số hạt dẻ của 4 con còn lại?

b) Biết rằng tất cả các con sóc đều nhận được số hạt dẻ là số lẻ không chia hết cho 3, chứng minh rằng có thể chọn ra hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là một lập phương đúng.

HƯỚNG DẪN CHẤM 11 Toán

Câu 1:

a). Chứng minh được $x_n \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $x_{n+1} \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2}\right) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy $\left(x_n\right)$ tăng.

Giả sử $\lim x_n = L$ ta có

$$\begin{cases} L > \frac{1}{2} \\ 2L = L + \sqrt{L^2 + 4L} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L > \frac{1}{2} \\ L^2 = L^2 + 4L \end{cases} \Leftrightarrow L = 0 \text{ Vô lí.}$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$

b) Từ $x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + 4x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$,

Suy ra

$$\left(2x_{n+1} - x_n\right)^2 = x_n^2 + 4x_n \Leftrightarrow x_n = x_{n+1}\left(x_{n+1} - x_n\right)$$

Suy ra $\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i+1}^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}$.

Suy ra $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \lim\left(6 - \frac{1}{x_n}\right) = 6$.

Câu 2:

a) Ta có:

Xét $x=1$ thì $2023^y = 2023 \Rightarrow y = 1$

Xét $x>1$ khi đó, nếu phương trình có nghiệm nguyên dương y thì $2022^x \equiv -1 \pmod{2023}$

Suy ra x lẻ.

Đặt $x = 2m+1, m \in \mathbb{N}^*$

Nếu y lẻ thì $2023^y \equiv -1 \pmod{8}$

Trong khi $2022^x + 1 = 2022^{2k+1} + 1 = 2022.2022^{2k} + 1 \equiv 6.36^t + 1 \equiv 1 \pmod{8}$

Suy ra (1) vô nghiệm.

Nếu y chẵn, đặt $y = 2m, m \in \mathbb{N}^*$

Khi đó, (1) trở thành $2022^x = 2023^{2m} - 1 = \left(2023^m - 1\right)\left(2023^m + 1\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2023^m - 1 = 2022^a \\ 2023^m + 1 = 2022^b \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}^*, a < b)$

$\Rightarrow 2022^b - 2022^a = 2$

$\Rightarrow 2022^a\left(2022^{b-a} - 1\right) = 2$, vô lí vì vế trái luôn lớn hơn 2.

Vậy phương trình (1) chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất là $(x, y) = (1,1)$

b) Ta có:

Ta giải bài toán trong trường hợp tổng quát với số nguyên $n \geq 3$ bất kỳ.

Giả sử rằng $(a+a_1-1)(a+a_2-1)\ldots(a+a_n-1) \mid \left(a^{n+1}+a-1\right)$. Có nghĩa là tồn tại số nguyên dương k sao cho $a^{n+1}+a-1 = k(a+a_1-1)(a+a_2-1)\ldots(a+a_n-1)$. (1)

Ta có $a = ma_1\ldots a_n$ với m là số nguyên dương. Chú ý rằng $a_1, \ldots, a_n > 1$, vì nếu chẳng hạn $a_1 = 1$ thì vế phải của (1) chia hết cho a còn vế trái của (1) không chia hết cho a, vô lý.

Từ $a^{n+1} \equiv 1 \pmod{a-1}$ và $a + a_i - 1 \equiv a_i \pmod{a-1}$ với $1 \leq i \leq n$ ta có

$1 \equiv ka_1\ldots a_n \pmod{a-1} \Rightarrow m \equiv ka \equiv k \pmod{a-1}$.

Chú ý rằng $m < a = ma_1\ldots a_n$ và $a_i > 1$ với $1 \leq i \leq n$ nên từ (1) ta có

$a^{n+1} + a - 1 \geq k(a+1)^n$.

Mà $a(a+1)^n > a^{n+1} + a - 1$ nên $a(a+1)^n > k(a+1)^n \Rightarrow k < a$.

Do k, m là những số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng $a-1$ và $k \equiv m \pmod{a-1}$ nên suy ra $k = m$. Nhưng $m \mid a$ và $k \mid a^{n+1} + a - 1$, nên $m \mid a^{n+1} + a - 1$, suy ra $m \mid 1$ do đó $k = m = 1$.

Tiếp theo ta có $a^{n+1} < a^{n+1} + a - 1 = \left(a+a_1-1\right)\ldots\left(a+a_n-1\right)$, suy ra

$a_1 \cdots a_n = a < \dfrac{a+a_1-1}{a} \cdots \dfrac{a+a_n-1}{a}$. Mặt khác, với $1 \leq i \leq n$ ta có

$\dfrac{a+a_i-1}{a} < a_i$ (vì tương đương với $aa_1 - a - a_i + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)\left(a_i - 1\right) > 0$)

Như vậy $a_1 \cdots a_n = a < a_1 \cdots a_n$, vô lý. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 3:

a) Thay $x = 0$ vào (*) ta được $f\big(y + f(y)\big) + f(0) = yf(0), \forall y \in \mathbb{R}$.

$$f\big(y + f(y)\big) = (y-1)f(0), \forall y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Rõ ràng nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (1) ta có f toàn ánh với việc cho y chạy.

b) Khi $f(0) = 0$.

Trong (*), thay $y \to -x$, ta có $f\left(2x - x + f(x - x)\right) + f(-x^2) = -xf(x)$ hay

$$f(-x^2) = -(x+1)f(x).$$

Trong đẳng thức trên, thay $x \to -x$ thì $f(-x^2) = -(-x+1)f(-x)$ nên ta có

$$(x+1)f(x) = (-x+1)f(-x). \quad (2)$$

Từ đó cho $x = 1$ thì được $f(1) = 0$, cho $x = -1$ thì được $f(-1) = 0$.

Trong (*), thay $y = 0$ thì được $f\left(2x + f(x)\right) = 0, \forall x.$ (3)

Trong (*), thay $y = 1$ thì được $f\left(2x + 1 + f(x+1)\right) = 0, \forall x$. Thay $x \to x - 1$

$$f\left(2x - 1 + f(x)\right) = 0. \quad (4)$$

Trong (*), thay $y = -1$ thì được $f\left(2x - 1 + f(x-1)\right) + f(-x) = -f(x)$. Thay $x \to x + 1$

$$f\left(2x + 1 + f(x)\right) = -\left[f(x+1) + f(-x-1)\right]. \quad (5)$$

Trong (*), thay $x = 1$ thì được $f\left(2 + y + f(1+y)\right) + f(y) = 0$. Cho $y = 2x - 1 + f(x)$ ta được

$$f\left(2 + 2x - 1 + f(x) + f\left(2x + f(x)\right)\right) + f\left(2x - 1 + f(x)\right) = 0.$$

Từ đây, kết hợp với (3), (4), ta có $f\left(2x + 1 + f(x)\right) = 0$. Kết hợp với (5), suy ra

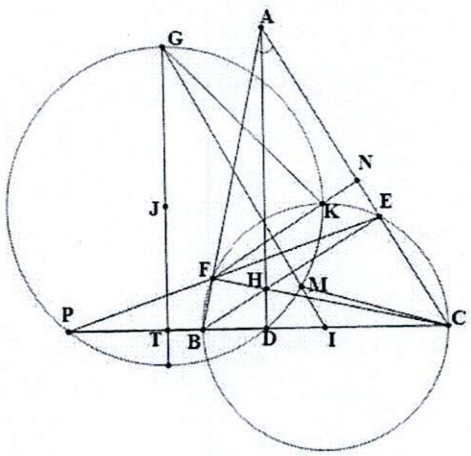
$$f(x+1) + f(-x-1) = 0.$$

hay $f(x) + f(-x) = 0$, chứng tỏ f là hàm số lẻ. Kết hợp với (2) ta được

$$(x+1)f(x) = (x-1)f(x) \text{ hay } f(x) = 0, \forall x.$$

Từ đó ta có $f(x) = 0, \forall x$.

Câu 4:



a) Ta chứng minh tứ giác $EKFC$ nội tiếp.

Thật vậy, có:

Xét tam giác $AFC : \widehat{AFC} = 90^o, \widehat{FAC} = 45^o \Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{ECF} = 45^o$.

Theo giả thiết $EK \perp AB, CF \perp AB \Rightarrow EK \parallel CF \Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{ECF} = 45^o$.

Giả sử đường thẳng FK đường thẳng AC tại điểm $N \Rightarrow \widehat{NEK} = 45^o \Rightarrow \widehat{NKE} = 45^o$.

Ta được: $\widehat{EKF} + \widehat{EKN} = 180^o$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{EKF} = 180^o - \widehat{EKN} = 180^o - 45^o = 135^o$.

Xét tứ giác $EKFC : \widehat{EKF} + \widehat{ECF} = 135^o + 45^o = 180^o$ nên tứ giác $EKFC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC vì E, F thuộc đường tròn đường kính BC. (đpcm)

b) Theo cách dựng có $(P, D, B, C) = -1$ mà I là trung điểm của đoạn thẳng BC nên theo hệ thức Newton có $\overline{ID}.\overline{IP} = \overline{IC}^2$.

Lại có $P_{I/(J)} = \overline{ID}.\overline{IP} = \overline{IM}.\overline{IG}$.

Suy ra $\overline{IM}.\overline{IG} = \overline{IC}^2 \Rightarrow \Delta IMC \sim \Delta ICG \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{ICG} = \widehat{ICK} = 45^o$.

Theo chứng minh a) K thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ICK} = \widehat{AFK} = 45^o$.

Do đó $\widehat{IMC} = 45^o$. (1)

Gọi T là trung điểm PD thì theo hệ thức Maclaurin, ta có: $\overline{CD}.\overline{CP} = \overline{CB}.\overline{CT}$

Lại có $P_{C/(J)} = \overline{CD}.\overline{CP} = \overline{CK}.\overline{CG} \Rightarrow \overline{CB}.\overline{CT} = \overline{CK}.\overline{CG}$ nên tứ giác $BTGK$ nội tiếp.

Theo chứng minh a) K thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BKG} = \widehat{BKC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{GTB} = 90^o \Rightarrow GT \parallel PD$.

Theo cách dựng của giả thiết, tam giác JPD cân tại J nên $JT \parallel PD$.

Vậy G, J, T thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{KGJ} = \widehat{KGT} = \widehat{GCT} = \widehat{KCB} = 45^o$. (2)

Từ (1) và (2) $\widehat{IMC} = \widehat{KGJ} = 45^o$. (đpcm)

Câu 5:

a)

Chọn ra một con sóc có nhiều hạt dẻ nhất thì có 5 cách. Con sóc đó sẽ có từ 112 hạt trở lên, bốn con sóc còn lại sẽ nhận được ít hơn 112 hạt.

Ta xét số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $x + y + z + t < 112$. Gọi w là số nguyên dương thỏa mãn $x + y + z + t + w = 112$.

Số nghiệm của phương trình này là C_{111}^4. Vậy nên số cách chia cần tìm là $5C_{111}^4$.

b) Ta có:

Giả sử phản chứng minh rằng với mọi cặp sóc, tích số hạt dẻ của chúng là một lập phương đúng. Khi đó gọi $x_1, x_2, \ldots, x_5$ là số hạt dẻ của các con sóc thì

$$x_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = \overline{1,5} \text{ và } x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 223.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng tất cả số hạt dẻ của các con sóc đều là lập phương đúng. Thật vậy, chẳng hạn nếu có x_1 không là lập phương đúng thì tồn tại số nguyên tố p để $3 \nmid v_p(x_1)$. Mặt khác, xét $2 \le j \le 5$ thì theo giả sử phản chứng, ta có $3 \mid v_p(x_1 x_j)$ nên $3 \nmid v_p(x_j)$, tức là đều có $v_p(x_j) \neq 0$ nên các số sẽ đều chia hết cho p. Từ đó suy ra $p \mid 223$ (và rõ ràng $p < 223$), nhưng điều này không thể xảy ra vì 223 là số nguyên tố.

Do đó, $x_1, x_2, \ldots, x_5$ đều là các lập phương đúng. Tuy nhiên, theo giả thiết thì các số này đều lẻ, mà lập phương đúng lẻ thì chia cho 9 dư $1, -1$ hoặc 0. Lại theo giả thiết, các số này không chia hết cho 3, nên mỗi số đó chia cho 9 dư 1 hoặc -1.

Khi đó tổng của chúng chia cho 9 dư $1, 3, 4, 5, 6$ hoặc 8. Trong khi đó 223 chia cho 9 dư 7. Điều mâu thuẫn này cho thấy điều giả sử ở trên là sai và sẽ có hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là lập phương đúng.