SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN 1
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN- KHỐI: 11

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 bài)
Ngày thi: 23 tháng 10 năm 2023

Bài 1 (2 điểm) Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực, thỏa mãn P(4)=24 và $x.P(x-1)=(x-4).P(x)$

Bài 2 (2 điểm) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, AI cắt BC tại D, lấy E và F đối xứng với D qua IB và IC. Gọi M, N, J là trung điểm của DE, DF, EF, các đường tròn (AEM) và (AFN) cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng:

a) MPNJ là tứ giác nội tiếp.

b) Ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Bài 3 (2 điểm) Cho n là số tự nhiên, $n \geq 4$. Các số 1, 2, 3,..., n được viết liên tiếp trên một đường tròn theo thứ tự đó. Hai số không kề nhau được gọi là một cặp "liên thông" nếu một trong hai cung tạo bởi chúng chứa toàn số bé hơn cả hai số đó. Kí hiệu S_n là số cặp "liên thông".

a) Tìm S_4, S_5.

b) Tìm S_n theo n.

Bài 4 (2 điểm)

a) Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của n^4+1 thì p chia cho 8 dư 1.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì n không thể là ước của 2^n-1.

Bài 5 (2 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y)\right)=yf(x), \forall x, y \in \left[1,+\infty\right)$$

Đáp án 11 Toán

$\boxed{\text{Bài 1}}$: (2đ)

Cho $x=0 \Rightarrow P(0)=0$ (1)

Cho $x=4 \Rightarrow P(3)=0$ (2) ——— 0,5

Cho $x=1 \Rightarrow P(0)=-3.P(1) \Rightarrow P(1)=0$ (do (1))

Cho $x=3 \Rightarrow 3.P(2)=-1.P(3) \Rightarrow P(2)=0$ (do (2)) ——— 0,5đ

Vậy $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3).Q(x)$. Thay vào giả thiết

$\Rightarrow x.(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).Q(x-1) = x(x-1)(x-2)(x-3).Q(x).(x-4)$

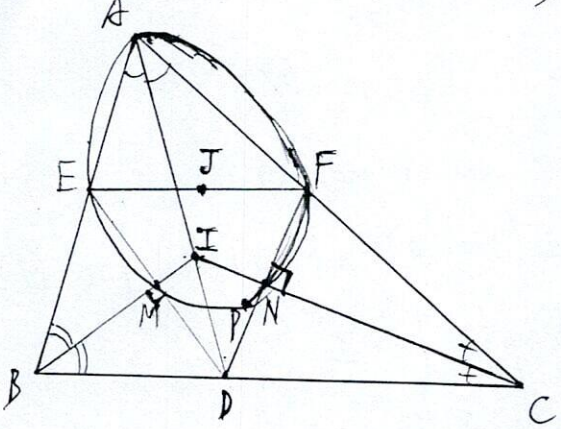
$\Rightarrow Q(x-1)=Q(x)$

$\Rightarrow Q(x)=c=const$ ——— 0,5đ

Do $P(4)=24$ nên $24.Q(4)=24 \Rightarrow Q(4)=1 \Big\} \Rightarrow Q(x)\equiv 1$.

$\Rightarrow P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ ——— 0,5đ

$\boxed{\text{Bài 2}}$



(1đ) a) $\angle MPN = \angle MPA + \angle NPA = \angle BED + \angle CFD = \angle BDE + \angle CDE$

$= 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - \angle MJN \Rightarrow MPNJ$ nt.

(1đ) b) Từ (a) $\Rightarrow \angle MPJ = \angle MNJ = \angle DEF$ (1)

Mặt khác $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow EF // BC$

$\Rightarrow \angle DEF = \angle EDB = \angle BED = \angle MPA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle MPJ = \angle MPA \Rightarrow A, J, P$ th/hàng.

$\boxed{\text{Bài 3}}$ (2đ)

a) (0,5đ) $S_4 = 1, S_5 = 2$.

b) (1,5đ) ~~Ta~~ bỏ đi số 1, thì chỉ còn $n-1$ số từ 2 đến n, chúng tạo ra S_{n-1} cặp liên thông. Khi cho số 1 vào một vị trí nào đó thì cặp liên mới

⟶

thẳng lúc trước vẫn liên thông) và có thêm 1 cặp liên thông mới tạo bởi 2 số ở hai bên liền kề số 1

$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + 1$ ———— 1đ

Mà $S_4 = 1$ nên $S_n = n-3$ ———— 0,5đ

$\boxed{\text{Bài 4}}$ a) (1đ) Vì $p \mid n^4+1 \Rightarrow p \mid n^8 - 1$ hay $n^8 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow ord_p(n) \mid 8$ — 0,25

$\Rightarrow ord_p(n) = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 3$ ———— 0,25

– Nếu $t \leq 2$ thì $2^t \mid 4 \Rightarrow ord_p(n) \mid 4 \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{p}$,

$\Rightarrow n^4 + 1 \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2 \,\vdots\, p$ (vô lý vì p lẻ) ———— 0,25

– Nếu $t = 3 \Rightarrow ord_p(n) = 2^3 = 8$.

Do $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nên $ord_p(n) \mid p-1$ $\Rightarrow 8 \mid p-1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{8}$ — 0,25

b) (1đ) g/sử $\exists n \geq 2$ mà $n \mid 2^n - 1 \Rightarrow n$ lẻ.

Gọi p là ước ng/tố nhỏ nhất của $n \Rightarrow p$ lẻ.

Tacó $2^n - 1 \,\vdots\, p \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow ord_p(2) \mid n$ (1)

Do $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow ord_p(2) \mid p-1$ (2)

Vì $ord_p(2) > 1$ nên $ord_p(2)$ có ước ng/tố q nào đó.

Từ (1) $\Rightarrow q \mid n$

Từ (2) $\Rightarrow q \mid p-1 \Rightarrow q \leq p-1 \Rightarrow q < p$ $\Rightarrow$ q là ước là ng/tố của n và $q < p$ (m/thuẫn với cách gọi p)

Vậy $\nexists n$ để $n \mid 2^n - 1$.

Bài 5

Cho $x=y=1 \Rightarrow f\left(f(1)\right)=f(1)$

Cho $y=f(1) \Rightarrow f\left(x.f\left(f(1)\right)\right)=f(1)f(x) \Rightarrow f\left(x.f(1)\right)=f(1)f(x)$ (1)

Cho $y=1 \Rightarrow f\left(x.f(1)\right)=f(x)$ (2)

từ (1) và (2) ta có $f(1)f(x)=f(x) \Rightarrow f(1)=1 (do f(x)\geq 1)$

Cho $x=1 \Rightarrow f\left(f(y)\right)=y.f(1)=y$ (3)

Ta sẽ chứng minh nếu $x>y$ thì $f(x)\geq f(y)$. Thật vậy

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}.y\right)=f\left(\frac{x}{y}.f\left(f(y)\right)\right)=f(y)f\left(\frac{x}{y}\right)\geq f(y)$$

(do $\frac{x}{y}>1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)\geq 1$, theo giả thiết của hàm số)

Ta chứng minh $f(x)=x$ là đáp số duy nhất.

Giả sử tồn tại z mà $f(z)\neq z$.

- Nếu $f(z)>z \Rightarrow f\left(f(z)\right)\geq f(z) \Rightarrow z\geq f(z)$ (dùng (3)), mâu thuẫn.

- Nếu $f(z)<z \Rightarrow f\left(f(z)\right)\leq f(z) \Rightarrow z\leq f(z)$ (dùng (3)), mâu thuẫn.

Vậy $f(x)=x$ (thử lại ta thấy thỏa mãn).