SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN 2**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**NĂM HỌC 2023-2024**
NGUYỄN TRÃI	**Môn: Toán 10**
	Thời gian làm bài: 180 phút
	(không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1; n = 1,2,3,... \end{cases}$

Tính giới hạn của tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ khi n tiến tới vô cùng.

Câu 2. (2 điểm)

a) Tìm nghiệm phức của phương trình $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

b) Hỏi có tồn tại đa thức $Q(x)$ hệ số thực sao cho tồn tại hai số thực a, b để

$$Q(x + x^2 + x^3) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2017} + ax^{2018} + bx^{2019} + x^{2020}?$$

Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Lấy X, Y, Z lần lượt là ba trung điểm của ba đoạn EF, FD, DE. Chứng minh đường thẳng qua X, Y, Z lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Câu 4. (2 điểm) Tìm tất cả các bộ số (p, q, r, n) với p, q, r là các số nguyên tố và n là số nguyên dương, sao cho:

$$p^2 = q^2 + r^n$$

Câu 5. (2 điểm) Cho tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 2023\}$. Với m là số nguyên dương, ta gọi $X \subset A$ là tập hợp $m-$tốt nếu như X có đúng m phần tử và với mọi x thuộc X thì $x-1$ hoặc $x+1$ cũng thuộc X.

a) Với $2 \le m \le 4$, tính số lượng tất cả các tập $m-$tốt.

b) Với $m = 5$, chứng minh rằng số tập $5-$tốt là số chính phương.

--- HẾT ---

Hướng dẫn giải 10 Toán

Câu 1. (2 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1 \end{cases} n = 1,2,3,...$

Tính giới hạn của tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ khi n tiến tới vô cùng.

LG:

Từ giả thiết ta suy ra:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} + 1$$

.

.

.

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 + 1$$

$$a_2 - a_1 = a_1 + 1$$

Cộng lại ta suy ra $a_n - a_1 = a_{n-1} + n - 1 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + n$. Lặp lại quá trình như vậy ta suy ra:

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + n - 1 + n = \cdots = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Do đó $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

Câu 2. (2 điểm) a) Tìm nghiệm phức của phương trình $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

b) Hỏi có tồn tại đa thức $Q(x)$ hệ số thực sao cho tồn tại hai số thực a, b để

$$Q(x + x^2 + x^3) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2017} + ax^{2018} + bx^{2019} + x^{2020}?$$

LG: a) Phương trình có 3 nghiệm phức là $x = -1, x = i, x = -i$.

b) Thay $x = -1$ ta suy ra $Q(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b$

Thay $x = i$ ta suy ra $Q(-1) = i.(1 + i + \cdots + i^{2016}) + ai^{2018} + bi^{2019} + i^{2020} = (1 - a) + i(1 - b)$

Suy ra $a - b = (1 - a) + i(1 - b)$ do đó $a = b = 1$. (1)

Mặt khác với $x = 0$ ta suy ra $Q(0) = 0$.

Và để ý đa thức $x^3 + x^2 + x$ còn có nghiệm $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ nên ta thay $x = w$ ta được:

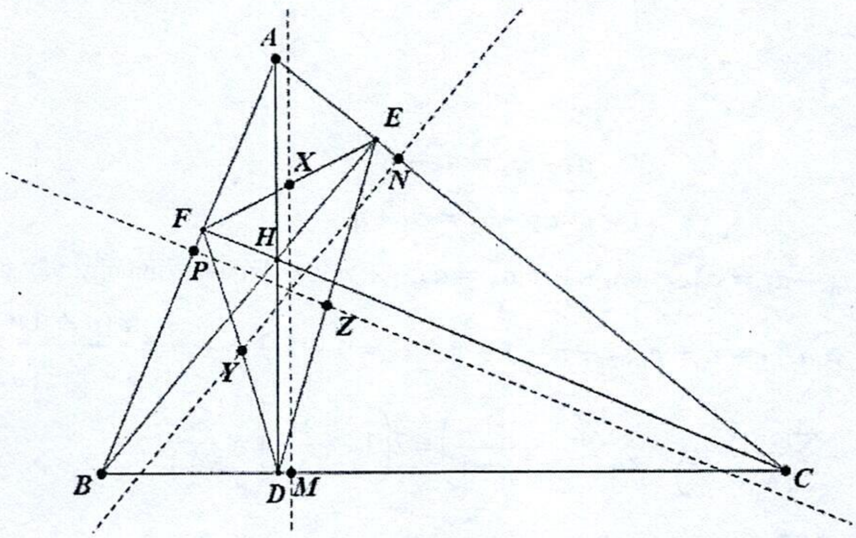
$$Q(0) = w.\frac{w^{2017} - 1}{w - 1} + a.w^{2018} + b.w^{2019} + w^{2020} = (b - a) + w(2 - a)$$

Để ý rằng: $w^3 = 1, w^2 = -1 - w$

Từ đó ta được $a = 2, b = 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra mẫu thuẫn. Vậy không tồn tại đa thức thỏa mãn.

Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Lấy X, Y, Z lần lượt là ba trung điểm của ba đoạn EF, FD, DE. Chứng minh đường thẳng qua X, Y, Z lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.



LG: Gọi M, N, P lần lượt là là chân đường vuông góc hạ từ X, Y, Z xuống AB, BC, CA.

Để chỉ ra XM, YN, ZP đồng quy dựa theo định lý Carnot ta sẽ chỉ ra:

$$(MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$$

Tương đương với việc chỉ ra:

$$(XB^2 - XC^2) + (YC^2 - YA^2) + (PA^2 - PC^2) = 0$$

Mà XB, XC là đường trung tuyến trong hai tam giác EFB và EFC nên theo công thức đường trung tuyến ta có:

$$XB^2 = \frac{2h_b^2 + 2FB^2 - EF^2}{4}$$

$$XC = \frac{2h_c^2 + 2EC^2 - EF^2}{4}$$

h_b, h_c là độ dài đường cao hạ từ B trong tam giác ABC.

Suy ra :

$$XB^2 - XC^2 = \frac{(h_b^2 - h_c^2) + (FB^2 - EC^2)}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$YC^2 - YA^2 = \frac{(h_c^2 - h_a^2) + (DC^2 - FA^2)}{2}$$

$$ZA^2 - ZB^2 = \frac{(h_a^2 - h_b^2) + (EA^2 - DB^2)}{2}$$

Do đó

$$(XB^2 - XC^2) + (YC^2 - YA^2) + (PA^2 - PC^2)$$

$$= \frac{1}{2}[(FB^2 - FA^2) + (EA^2 - EC^2) + (DC^2 - DB^2)] = 0$$

Điều này đúng do ta áp dụng định lý Carnot cho tam giác ABC trực tâm H.

Câu 4. (2 điểm) Tìm tất cả các bộ số (p, q, r, n) với p, q, r là các số nguyên tố và n là số nguyên dương, sao cho:

$$p^2 = q^2 + r^n$$

LG:

$p^2 = q^2 + r^n \Leftrightarrow r^n = (p - q)(p + q)$

TH1. r là ước của $p - q$ và $p + q$ suy ra $r|2p$. Do r, p nguyên tố nên ta lại có 2 trường hợp nhỏ hơn

1.1 $r|p$ suy ra $r = p$. Thay vào phương trình ta suy ra $p^2 = q^2 + p^n$ .Do $n \geq 1$ nên $p|q$ mà p, q là số nguyên tố nên $p = q$ dẫn tới $r = 0$ (trái với giả thiết n nguyên tố)

1.2 $r = 2$ nên ta có $p + q = 2^a, p - q = 2^b$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}, a + b = n$. Rõ ràng $a > b$ và ta có:

$$p = 2^{b-1}(2^{a-b} + 1)$$

Do p là số nguyên tố nên bắt buộc $b - 1 = 0$ hay $b = 1$ suy ra $p - q = 2, p + q = 2^a$ và $p = 2^{a-1} + 1, q = 2^{a-1} - 1$.

Xét theo đồng dư mod 3, $p \equiv (-1)^{a-1} + 1 \ (mod\ 3)$. Nếu a lẻ suy ra $p \equiv 0 \ (mod\ 3)$ hay $p = 3, q = 1$ (vô lý do q nguyên tố).

Nếu a chẵn suy ra $q \equiv 0\ (mod\ 3)$ hay $q = 3$ do đó $p = 5$. Ta tìm được bộ số thỏa mãn là $(p, q, r, n) = (5,3,2,4)$

TH2. r là ước của một trong hai số $p - q$ và $p + q$. Do $p + q > p - q$ nên ta phải có $p - q = 1$. Do p, q nguyên tố kết hợp với tính chẵn lẻ ta suy ra $p = 3, q = 2$. Ta tìm được bộ số thỏa mãn là $(p, q, r, n) = (3,2,5,1)$

Câu 5. (2 điểm) Cho tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 2023\}$. Với m là số nguyên dương, ta gọi $X \subset A$ là tập hợp $m-$tốt nếu như X có đúng m phần tử và với mọi x thuộc X thì $x-1$ hoặc $x+1$ cũng thuộc X.

a) Với $2 \le m \le 4$, tính số lượng tất cả các tập $m-$tốt.

b) Với $m = 5$, chứng minh rằng số tập $5-$tốt là số chính phương.

LG: a) Với $m = 2$, tập hợp tốt phải có dạng $\{a, a+1\}$ nên có tất cả 2022 tập.

Với $m = 3$, tập hợp tốt phải có dạng $\{a, a+1, a+2\}$ nên có tất cả 2021 tập.

Với $m = 4$, tập hợp tốt có dạng $\{a, b, c, d\}$ với $a < b < c < d$. Rõ ràng phải có

$$d = c+1 \text{ và } b = a+1.$$

Ngoài ra, b, c không cần có liên hệ gì, chỉ cần thỏa mãn $b < c$. Do đó, $X = \{a, a+1, c, c+1\}$ với $c - a \ge 2$ nên số cách chọn cặp (a, c) là

$$2020 + 2019 + \cdots + 1 = 1010 \cdot 2021.$$

Vậy số tập hợp thỏa mãn là $2022 + 2021 + 1010 \cdot 2021 = 1011.2023$.

b) Xét tập tốt có dạng $\{a, b, c, d, e\}$ với $1 \le a < b < c < d < e \le 2023$. Ta có

$$a+1 = b,\ d+1 = e \text{ và một trong hai điều sau phải xảy ra: } c = b+1 \text{ hoặc } c = d-1.$$

Gọi S_1 là tập hợp các tập tốt mà $c = b+1$, còn S_2 là tập hợp các tập tốt mà $c = d-1$.

Các tập tốt sẽ là $S = S_1 \cup S_2$ nên $|S| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$.

Tương tự phần a, ta tính được $|S_1| = |S_2| = \sum_{k=1}^{2019} k = \dfrac{2019 \cdot 2020}{2}$

và $|S_1 \cap S_2| = 2019$ (do ta có 5 phần tử liên tiếp).

Khi đó $S = 2019 \cdot 2020 - 2019 = 2019^2$ là số chính phương.