SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN I
NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN: TOÁN 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (1,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thỏa mãn $f(2) = 4$ và

$$f(xy + x) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in Z.$$

Câu 2: (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) có $u_1 = \frac{3}{2}, 2u_{n+1} + u_n = u_{n+1}.u_n, \forall n \in N^*$. Tìm số hạng tổng quát của u_n.

Câu 3: (3,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$.

b) Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I và trọng tâm G. Biết IG vuông góc IC. Chứng minh rằng $\frac{6}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Câu 4: (2,0 điểm) Một tập hợp S các số nguyên được gọi là "chất" nếu tồn tại các số nguyên a < b < c sao cho a và c thuộc S nhưng b không thuộc S. Hỏi có bao nhiêu tập hợp "chất" là tập con của A = {1; 2;...; 2023}.

Câu 5: (2,0 điểm) Cho $n = 9^{2^a} - 3^{2^a} + 1$ với a là một số nguyên dương. Chứng minh $3^{n-1} - 1$ chia hết cho n.

Đáp án: Toán 10

Hướng dẫn

Câu 1: (2, 0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thỏa mãn $f(2) = 4$ và

$$f(xy+x) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in Z$$

Thay $y = 0 \Rightarrow f(x) = xf(0) + f(x), \forall x \in Z \Rightarrow xf(0) = 0, \forall x \in Z \Rightarrow f(0) = 0$

Thay $y = -1 \Rightarrow 0 = xf(-1) + f(x), \forall x \in Z \Rightarrow f(x) = -f(-1)x = ax, \forall x \in Z$

Mà f(2) = 4 => a = 2 => $f(x) = 2x, \forall x \in Z$. Thử lại thỏa mãn.

Câu 2: (2, 0 điểm) Cho dãy số (u_n) có $u_1 = \frac{3}{2}, 2u_{n+1} + u_n = u_{n+1}.u_n, \forall n \in N^*$. Tìm số hạng tổng quát của u_n.

Đầu tiên ta chứng minh $u_n \neq 0, \forall n \in N^*$

Thật vậy, giả sử tồn tại n để $u_n = 0$. Thay vào công thức $2u_n + u_{n-1} = u_n.u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} = 0$

Làm tương tự ta được $u_{n-2} = 0, \ldots, u_1 = 0$ => Mâu thuẫn.

Khi đó, chia cả 2 vế cho $u_{n+1}.u_n$ ta được $2\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = -\frac{2}{u_n} + 1$

Đặt $a_n = \frac{1}{u_n}, \forall n \in N^* \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$ và $a_{n+1} = -2a_n + 1, \forall n \in N^*$

⇨ $a_{n+1} - \frac{1}{3} = -2(a_n - \frac{1}{3})$. Dùng công thức cấp số nhân ta được $a_n - \frac{1}{3} = (-2)^{n-1}.\frac{1}{3}$

⇨ $a_n = \frac{(-2)^{n-1}+1}{3} \Rightarrow u_n = \frac{3}{(-2)^{n-1}+1}$

Câu 3: (2, 0 điểm)

a) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

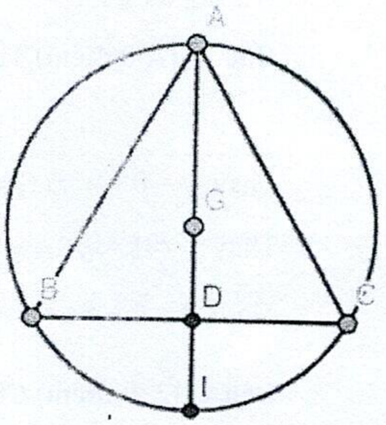
Khi đó: S = 3MG + 3MI ≥ $3GI$. Dấu "=" xảy ra ⇔ M, G, I thẳng hàng và M nằm giữa G và I.

Ta xác định vị trí điểm I: Có $\overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

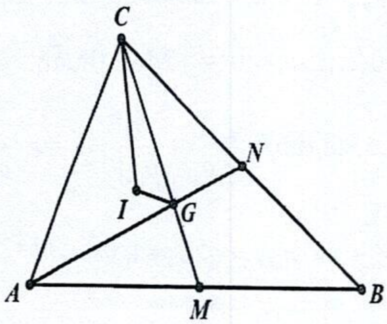
⇨ $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$ với D là trung điểm BC

Tam giác ABC đều nên AI là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (ABC) => GI = R = $\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$

⇨ Min S = $3GI = a\sqrt{3}$



b) Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I và trọng tâm G. Biết IG vuông góc IC. Chứng minh rằng $\frac{6}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.



Ta chứng minh $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Rightarrow a\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}\right)+b\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{CI}=\frac{1}{a+b+c}\left(a.\overrightarrow{CA}+b.\overrightarrow{CB}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CG}=\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA}+\left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CB}$

Khi đó IG vuông góc IC $\Leftrightarrow\left[(2a-b-c)\overrightarrow{CA}+(2b-a-c)\overrightarrow{CB}\right]\left(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(ab+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)\left[b(2a-b-c)+a(2b-a-c)\right]=0$

$ab+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=ab+ab\cos C=ab(1+\cos C)>0$

Nên ta có: $b(2a-b-c)+a(2b-a-c)=0$

$\Leftrightarrow b(3a-a-b-c)+a(3b-a-b-c)=0\Leftrightarrow 6ab=(a+b)(a+b+c)\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{6}=\frac{ab}{a+b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Câu 4: (2,0 điểm) Một tập hợp S các số nguyên được gọi là "chất" nếu tồn tại các số nguyên a < b < c sao cho a và c thuộc S nhưng b không thuộc S. Hỏi có bao nhiêu tập hợp "chất" là tập con của A = {1; 2;...; 2023}.

Ta đếm số tập hợp con của A nhưng không "chất"

A có tất cả 2^{2023} tập hợp con. Trong đó, để tập con X của A là không chất thì có thể chia X thành các trường hợp sau:

TH1: X là tập rỗng hoặc chỉ có 1 phần tử => có 1 + 2023 = 2024 tập X như vậy

TH2: X có ít nhất 2 phần tử. X là không chất tức là với cặp số a < c thuộc X thì mọi số nguyên b giữa a và c phải thuộc X. Giả sử gọi m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong X => mọi số nguyên từ m + 1 và M -1 đều phải thuộc X => X là tập các số nguyên liên tiếp từ m đến M. Như vậy, số tập X không chất trong trường hợp này chính là số các bộ số nguyên liên tiếp trong A.

Mỗi bộ số nguyên liên tiếp như vậy đại diện bằng số đầu và số cuối, cứ mỗi cặp số (m; M) xác định cho ta duy nhất một bộ số nguyên liên tiếp và ngược lại. Do vậy số bộ số nguyên liên tiếp trong X là số cách chọn ra 2 số m, M trong A => có C_{2023}^2 cách chọn

Do đó tập hợp không chất là $2024+C_{2023}^2$

Vậy số tập hợp chất là $2^{2023}-2024-C_{2023}^2$

Câu 5: (2,0 điểm) Cho $n=9^{2^a}-3^{2^a}+1$ với a là một số nguyên dương. Chứng minh $3^{n-1}-1$ chia hết cho n.

Đặt $3^{2^a}=x$ thì $n=x^2-x+1$. Ta cần chứng minh $3^{x^2-x}-1$ chia chết cho x^2-x+1

Có $x^3+1 \vdots x^2-x+1$ => $3^{3.2^a}+1 \vdots$ n => $3^{3.2^{a+1}}-1 \vdots n$

Ta chỉ cần CM: $x^2-x \vdots 3.2^{a+1}$

Có $x^2-x=3^{2^a}.(3^{2^a}-1)$

Theo LTE, $v_2(3^{2^a}-1)=v_2(3-1)+v_2(3+1)+v_2(2^a)-1$ = a + 2 => $3^{2^a}-1 \vdots 2^{a+1}$ => $3^{2^a}.(3^{2^a}-1) \vdots 3.2^{a+1}$

Ta có đpcm