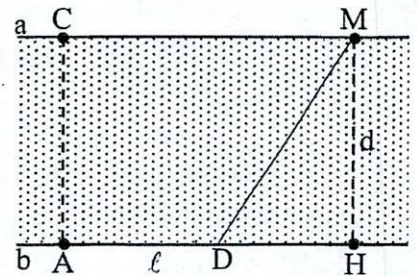


ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 02 trang, gồm 06 câu)

Câu 1:

Cho a và b là hai con đường thẳng song song và ngăn cách với nhau bởi một thảm cỏ. Ban đầu, một người tên T ở điểm A, bên xe buýt ở điểm M, các điểm C và H được chọn sao cho ACMH là hình chữ nhật có chiều rộng d và chiều dài $\ell = \sqrt{3}d$ (Hình 1). Biết độ lớn vận tốc mà người tên T chạy trên các con đường thẳng là v_1 , còn khi chạy trên thảm cỏ là $v_2 = \frac{v_1}{2}$ (với v_1 không đổi).



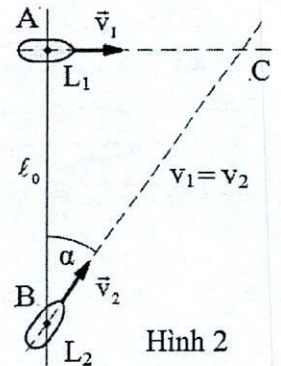
Hình 1

- Để chạy đến điểm M, người tên T chọn cách chạy thẳng theo hướng từ A đến điểm D trên đường b (điểm D nằm trên đoạn AH), sau đó chạy thẳng trên thảm cỏ từ D đến M. Xác định độ dài đoạn AD (theo d) để thời gian người đó di chuyển theo cách đó là nhỏ nhất?
- Ngay khi xe buýt bắt đầu rời bến M, theo hướng về C với vận tốc không đổi có độ lớn $v = 2v_2$, thì người tên T bắt đầu chạy từ A qua thảm cỏ theo đường thẳng hợp với AH một góc α để đón xe buýt. Tìm biểu thức xác định α (theo ℓ, d) để tới được đường a cùng lúc hoặc trước khi xe buýt tới đó.

Câu 2:

Trên mặt hồ có hai tàu L_1, L_2 , ban đầu (tại thời điểm $t = 0$) hai tàu ở tại hai điểm A và B cách nhau một khoảng ℓ_0 (Hình 2), sau đó hai tàu bắt đầu chuyển động thẳng đều với tốc độ lần lượt là $v_1 = v_2 = v$. Tàu L_1 di chuyển dọc theo phương vuông góc với AB, tàu L_2 di chuyển theo phương hợp với AB góc α (hình vẽ). Coi vận tốc dòng nước bằng không.

Sau khoảng thời gian t_{\min} là bao nhiêu thì khoảng cách giữa hai tàu là cực tiểu. Xác định khoảng cách cực tiểu đó.



Hình 2

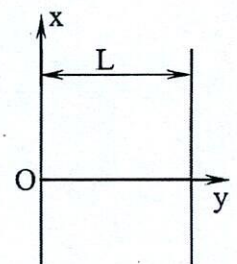
Câu 3:

Một chất điểm chuyển động thẳng chậm dần trên một đường thẳng với một gia tốc có độ lớn là b, giá trị vận tốc là v, với $b = k\sqrt{v}$, trong đó k là một hằng số dương. Tại thời điểm ban đầu giá trị vận tốc của chất điểm bằng v_0 .

Hỏi quãng đường mà chất điểm đi được từ thời điểm ban đầu cho đến khi dừng lại và thời gian đi hết quãng đường ấy?

Câu 4:

Một đoạn sông thẳng với hai bờ sông song song với nhau và cách nhau một đoạn L (Hình 3). Một chiếc thuyền bơi qua sông từ điểm O (ở bờ sông bên này) với vận tốc v_1 không đổi theo hướng luôn vuông góc với dòng nước chảy. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Dòng nước chảy có vận tốc đối với bờ tại mọi điểm đều song song với bờ, nhưng có giá trị phụ thuộc vào khoảng cách y đến bờ theo quy luật: $v_2 = v_0 \sin \frac{\pi y}{L}$, với v_0 là hằng số. Hãy xác định:



Hình 3

1. Vận tốc của con thuyền đối với bờ sau thời gian t kể từ khi xuất phát và vận tốc tại thời điểm thuyền đến giữa dòng (vị trí có tọa độ $y = \frac{L}{2}$)?

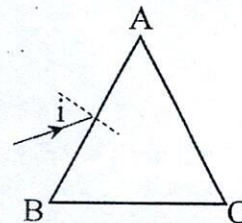
2. Xác định phương trình chuyển động, phương trình quỹ đạo của con thuyền và tọa độ điểm đến của con thuyền ở bờ bên kia sông?

Câu 5:

Cho lăng kính có tiết diện là tam giác đều ABC. Biết chiết suất của chất làm lăng kính là $\sqrt{2}$ và lăng kính đặt trong không khí. Chiếu tia sáng từ không khí tới mặt bên AB với góc tới i (Hình 4). Coi chiết suất của không khí bằng 1.

1. Với $i = 60^\circ$, Tính góc hợp bởi giữa tia tới và tia ló ra khỏi lăng kính.

2. Tìm giá trị của góc tới i để tia ló đi sát mặt AC.

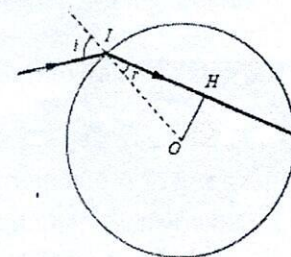


Hình 4

Câu 6:

Một quả cầu tâm O, bán kính R được làm bằng một chất trong suốt, đồng tính có chiết suất n , đặt trong không khí (chiết suất của không khí gần bằng 1).

1. Từ không khí, chiếu một tia sáng tới vào quả cầu dưới góc tới $i = 60^\circ$ (nằm trong mặt phẳng bán kính). Trường hợp $n = \sqrt{3}$, tia khúc xạ như hình vẽ 5. Tìm giá trị OH theo R (với OH vuông góc với tia khúc xạ).



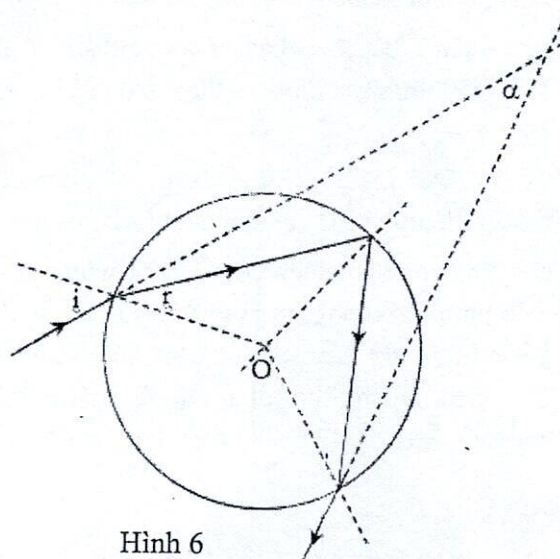
Hình 5

2. Trường hợp $n = \frac{4}{3}$. Từ không khí, chiếu một tia

sáng tới vào quả cầu dưới góc tới i (nằm trong mặt phẳng bán kính) như hình vẽ (gồm hai lần khúc xạ và một lần phản xạ toàn phần ở mặt trong của quả cầu). Biết i thay đổi được. Phương của tia tới và phương của tia ló hợp với nhau góc α .

a. Xác định α theo góc i , n (trên hình vẽ 6).

b. Xác định giá trị của i để α đạt giá trị nhỏ nhất.



Hình 6

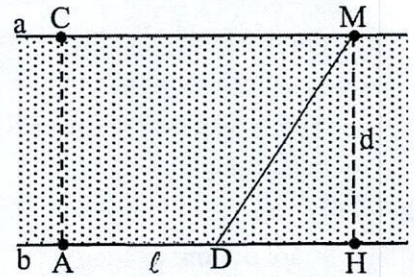
Hết

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Câu 1:

Cho a và b là hai con đường thẳng song song và ngăn cách với nhau bởi một thảm cỏ. Ban đầu, một người tên T ở điểm A, bên xe buýt ở điểm M, các điểm C và H được chọn sao cho ACMH là hình chữ nhật có chiều rộng d và chiều dài $\ell = \sqrt{3}d$. Biết độ lớn vận tốc mà người tên T chạy trên các con đường thẳng là v_1 , còn khi chạy trên thảm cỏ là $v_2 = \frac{v_1}{2}$ (với v_1 không đổi).



Hình 1

- Để chạy đến điểm M, người tên T chọn cách chạy thẳng theo hướng từ A đến điểm D trên đường b (điểm D nằm trên đoạn AH), sau đó chạy thẳng trên thảm cỏ từ D đến M. Xác định độ dài đoạn AD (theo d) để thời gian người đó di chuyển theo cách đó là nhỏ nhất?
- Ngay khi xe buýt bắt đầu rời bến M hướng về C với vận tốc không đổi có độ lớn $v = 2v_2$, thì người tên T bắt đầu chạy từ A qua thảm cỏ theo đường thẳng hợp với AH một góc α để đón xe buýt. Tìm biểu thức xác định α (theo ℓ, d) để tới được đường a cùng lúc hoặc trước khi xe buýt tới đó.

BG:

Câu 2:

Trên mặt hồ có hai tàu L_1, L_2 ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), hai tàu ở tại hai điểm A và B cách nhau một khoảng ℓ_0 , sau đó hai tàu bắt đầu chuyển động thẳng đều với tốc độ lần lượt là $v_1 = v_2 = v$. Tàu L_1 di chuyển dọc theo phương vuông góc với AB, tàu L_2 di chuyển theo phương hợp với AB góc α (hình vẽ). Coi vận tốc dòng nước bằng không.

Sau khoảng thời gian t_{\min} là bao nhiêu thì khoảng cách giữa hai tàu là cực tiểu. Xác định khoảng cách cực tiểu đó.

BG :

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình chuyển động của mỗi tàu:

$$\begin{aligned} x_1 &= vt; y_1 = 0 \\ x_2 &= vt \sin \alpha; y_2 = vt \cos \alpha - \ell_0 \end{aligned}$$

Khoảng cách giữa hai tàu tại thời điểm t:

$$\begin{aligned} \ell^2 &= [vt(1 - \sin \alpha)]^2 + [\ell_0 - vt \cos \alpha]^2 \\ &= v^2 t^2 (1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha) + \ell_0^2 - 2vt \ell_0 \cos \alpha + v^2 t^2 \cos^2 \alpha \\ &= 2(1 - \sin \alpha)v^2 t^2 - 2\ell_0 \cos \alpha vt + \ell_0^2 \quad (1) \end{aligned}$$

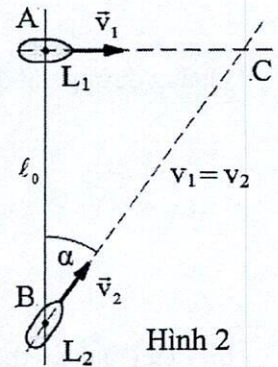
Biểu thức (1) có dạng tam thức bậc 2 là $y = at^2 - bt + c$, với hệ số $a = 2(1 - \sin \alpha)v^2 > 0$, do đó đồ thị của tam thức bậc 2 có bề lõm hướng lên ứng với tọa độ đỉnh đạt giá trị cực tiểu.

Ta có:

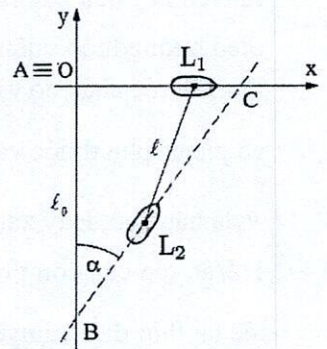
$$t_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{2\ell_0 \cos \alpha}{4(1 - \sin \alpha)v^2} = \frac{\ell_0 \cos \alpha}{2v(1 - \sin \alpha)} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\ell_{\min}^2 = \frac{2v^2 \ell_0^2 \cos^2 \alpha}{4v^2(1 - \sin \alpha)} - \frac{2v^2 \ell_0^2 \cos^2 \alpha}{2v^2(1 - \sin \alpha)} + \ell_0^2 = \ell_0^2 - \frac{\ell_0^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha)}$$



Hình 2



$$\Rightarrow \ell_{\min} = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha)}} = \ell_0 \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}}$$

Câu 3: Một chất điểm chuyển động thẳng chậm dần trên một đường thẳng với một gia tốc có độ lớn là b , giá trị vận tốc là v , với $b = k\sqrt{v}$, trong đó k là một hằng số dương. Tại thời điểm ban đầu giá trị vận tốc của chất điểm bằng v_0 .

Hỏi quãng đường mà chất điểm đi được từ thời điểm ban đầu cho đến khi dừng lại và thời gian đi hết quãng đường ấy?

BG:

Về độ lớn: $b = k\sqrt{v}$

Về dấu ta có:

$$a = -k\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v} \Leftrightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k dt$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{v} = -kt + C$$

Lúc $t = 0$, $v = v_0 \Rightarrow C = 2\sqrt{v_0} \Rightarrow 2\sqrt{v} = -kt + 2\sqrt{v_0}$

$$\Rightarrow v = v_0 - k\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{k^2}{4} \cdot t^2$$

Khi chất điểm dừng lại thì $v = 0$:

$$\Rightarrow t = \frac{2}{k} \sqrt{v_0} \quad (*)$$

Quãng đường vật đi được cho đến khi dừng lại:

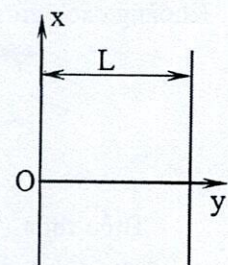
$$S = \int_0^{\frac{2}{k}\sqrt{v_0}} v dt = \int_0^{\frac{2}{k}\sqrt{v_0}} (v_0 - k\sqrt{v_0} \cdot t + \frac{k^2}{4} \cdot t^2) dt$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3k} \cdot v_0^{\frac{3}{2}}$$

b. Từ (*) ta có thời gian đi hết quãng đường ấy: $t = \frac{2}{k} \sqrt{v_0}$.

Câu 4:

Một đoạn sông thẳng với hai bờ sông song song với nhau và cách nhau một đoạn L . Một chiếc thuyền bơi qua sông từ điểm O (ở bờ sông bên này) với vận tốc v_1 không đổi theo hướng luôn vuông góc với dòng nước chảy. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Dòng nước chảy có vận tốc đối với bờ tại mọi điểm đều song song với bờ, nhưng có giá trị phụ thuộc vào khoảng cách y đến bờ theo quy luật: $v_2 = v_0 \sin \frac{\pi y}{L}$, với v_0 là hằng số. Hãy xác định:



Hình 3

1. Vận tốc của con thuyền đối với bờ sau thời gian t kể từ khi xuất phát và vận tốc tại thời điểm thuyền đến giữa dòng (vị trí có tọa độ $y = \frac{L}{2}$)?

2. Xác định phương trình chuyển động, phương trình quỹ đạo của con thuyền và tọa độ điểm đến của con thuyền ở bờ bên kia sông?

BG:

1. Theo bài thì:

$$v_x = v_2 = v_0 \sin \frac{\pi y}{L} ; \quad v_y = v_1$$

$$\text{Vậy: } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 \sin^2 \frac{\pi y}{L}}$$

- Ở thời điểm t , thuyền đến vị trí có $y = v_1 t$ do đó:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi v_1 t}{L} \right)}$$

- Khi thuyền ra đến giữa dòng thì:

$$y = \frac{L}{2} \Rightarrow t = \frac{y}{v_1} = \frac{L}{2v_1} \Rightarrow v\left(\frac{L}{2}\right) = \sqrt{v_1^2 + v_0^2}$$

2. Ta có:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \sin \left(\frac{\pi v_1}{L} t \right) \Rightarrow dx = v_0 \sin \left(\frac{\pi v_1}{L} t \right) dt \Rightarrow x = \int v_0 \sin \left(\frac{\pi v_1}{L} t \right) dt = - \frac{v_0 L}{\pi v_1} \cos \left(\frac{\pi v_1}{L} t \right) + C$$

$$\text{Tại } t = 0 \text{ thì: } x(0) = 0 = - \frac{v_0 L}{\pi v_1} + C \Rightarrow C = \frac{v_0 L}{\pi v_1}$$

Do đó ta có:

$$x = \frac{v_0 L}{\pi v_1} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi v_1}{L} t \right) \right] = \frac{2v_0 L}{\pi v_1} \sin^2 \left(\frac{\pi v_1}{2L} t \right)$$

Vậy phương trình chuyển động của thuyền là:

$$\begin{cases} x = \frac{2v_0 L}{\pi v_1} \sin^2 \left(\frac{\pi v_1}{2L} t \right) \\ y = v_1 t \end{cases}$$

Phương trình quỹ đạo của thuyền:

$$x = \frac{2v_0 L}{\pi v_1} \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2L} \right)$$

Khi thuyền sang đến bờ bên kia thì: $y = L$.

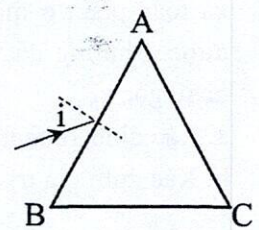
Thay vào phương trình quỹ đạo ta xác định được vị trí thuyền cập bờ là:

$$x = \frac{2v_0 L}{\pi v_1}$$

Câu 5: Cho lăng kính có tiết diện là tam giác đều ABC. Biết chiết suất của chất làm lăng kính là $\sqrt{2}$ và lăng kính đặt trong không khí. Chiếu tia sáng từ không khí tới mặt bên AB với góc tới i (hình 4). Coi chiết suất của không khí bằng 1.

- Với $i = 60^\circ$. Tính góc hợp bởi giữa tia tới và tia ló ra khỏi lăng kính.
- Tìm giá trị của góc tới i để tia ló đi sát mặt AC.

1.



Hình 4

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{2} \sin r_1$$

$$\sin r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \rightarrow r_1 = 37^\circ 45'$$

$$r_2 = A - r_1 = 60^\circ - 22^\circ 15'$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2 = \sqrt{2} \sin 22^\circ 15' = 0,535$$

$$\rightarrow i_2 = 32^\circ 21'$$

$$D = i_1 + i_2 - A = 60^\circ + 32^\circ 21' - 60^\circ = 32^\circ 21'$$

2.

Vì tia ló đi sát mặt AC nên: $i_2 = 90^\circ$

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

$$\sin 90^\circ = \sqrt{2} \sin r_2$$

$$\sin r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r_2 = 45^\circ$$

$$r_1 = A - r_2 = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

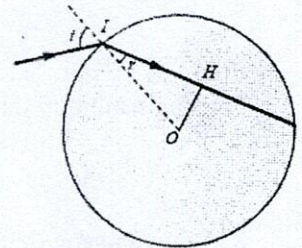
$$\sin i_1 = n \sin r_1 = \sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ = 0,366$$

$$i_1 = 21^\circ 28'$$

Câu 6:

Một quả cầu tâm O, bán kính R được làm bằng một chất trong suốt, đồng tính có chiết suất n, đặt trong không khí (chiết suất của không khí gần bằng 1).

1. Từ không khí, chiếu một tia sáng tới vào quả cầu dưới góc tới $i = 60^\circ$ (nằm trong mặt phẳng bán kính). Trường hợp $n = \sqrt{3}$, tia khúc xạ như hình vẽ 5. Tìm giá trị OH theo R (với OH vuông góc với tia khúc xạ).



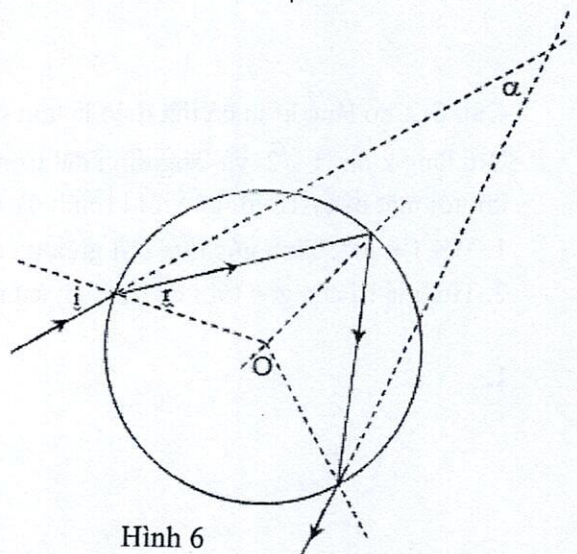
Hình 5

2. Trường hợp $n = \frac{4}{3}$. Từ không khí, chiếu một tia sáng

tới vào quả cầu dưới góc tới i (nằm trong mặt phẳng bán kính) như hình vẽ (gồm hai lần khúc xạ và một lần phản xạ toàn phần ở mặt trong của quả cầu). Biết i thay đổi được. Phương của tia tới và phương của tia ló hợp với nhau góc α .

a. Xác định α theo góc i, r (trên hình vẽ 6).

b. Xác định giá trị của i để α đạt giá trị nhỏ nhất.



Hình 6

BG:

1.

Khi chiết suất không thay đổi. Phương trình định luật khúc xạ ánh sáng cho điểm tới I

$$\sin i = n \sin r$$

$$\Leftrightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sin(60^\circ)}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = 30^\circ$$

Từ hình vẽ, ta có

$$d_{\min} = R \sin r = R \sin(30^\circ) = \frac{R}{2}$$

2.

a.

$$\alpha = 4r - 2i$$

b.

Để α cực tiểu, ta có: $\frac{dD}{di} = 0$. Đạo hàm theo i hai vế của (1), ta có

$$\frac{dD}{di} = 4 \frac{dr}{di} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dr}{di} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Theo ĐL khúc xạ: $\sin i = n \sin r$, ta có:

$$\begin{aligned} d(\sin i) &= nd(\sin r) \\ \Rightarrow \cos i di &= n \cos r dr \\ \Leftrightarrow \frac{dr}{di} &= \frac{\cos i}{n \cos r} \end{aligned}$$

Thay vào (2)

Suy ra:

$$\frac{\cos i}{n \cos r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n \sqrt{1 - \sin^2 r}} = \frac{1}{2}$$

Thay $\sin i = n \sin r$ vào ta được

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n}\right)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4 \sin^2 i = n^2 - \sin^2 i \Leftrightarrow \sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3} = \frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow \sin i = \frac{2\sqrt{15}}{9} \Leftrightarrow i = 59,39^\circ$$

