SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG	ĐỀ THI THÁNG LẦN 4 LỚP 11 TOÁN
TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI	NĂM HỌC 2021 – 2022
	MÔN TOÁN
	Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 4 - m$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt A, B, I (I thuộc đoạn AB) mà tiếp tuyến tại A với đồ thị cắt lại đồ thị tại điểm M khác A thỏa mãn tam giác AMB cân tại M.

Câu 2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = SB, SC = SD$

a) Khi $SA = SC$ và góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

b) Khi hai mặt bên (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính diện tích thiết diện do mặt phẳng qua S, vuông góc AB tạo với hình chóp.

Câu 4. (1,0 điểm) Gọi S là tập tất cả các số có 7 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 59. Lấy ngẫu nhiên một số trong S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11 .

Câu 5. (2,0 điểm) Cho n là số nguyên dương $(n \geq 2)$, xét dãy số hữu hạn $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ được xác định như sau:

$$a_1 = 2n, a_{k+1} = \frac{a_k(2n-k)}{k}, 1 \leq k \leq 2n-1$$

Chứng minh rằng: $2a_n - a_{n+1} > 2^{2n-1}$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho các số nguyên dương $n > k > 1$. Tìm hằng số $T(n,k)$ lớn nhất sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_i - x_j\right)^2 \geq T(n,k) \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(x_i - x_j\right)^2$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 4 11 TOÁN 2020-2021

Câu 1. (2,0 điểm)

+) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C_m\right)$:

$x^3-3x^2+mx+4-m=3-x(1)\leftrightarrow(x-1)\left(x^2-2x-1+m\right)=0$

$\leftrightarrow x=1$ hoặc $x^2-2x-1+m=0(2)$

Đường thẳng d cắt $\left(C_m\right)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $1\leftrightarrow m<2$

+) Gọi a,b là nghiệm phương trình (2) thì $a+b=2$

Xét $A(a,3-a),B(b,3-b),I(1,2)$ là các giao điểm của d và $\left(C_m\right)$ thì do $a+b=2$ nên I là trung điểm AB

+) Phương trình tiếp tuyến tại A:

$\Delta: y=\left(3a^2-6a+m\right)(x-a)+a^3-3a^2+ma+4-m$

Phương trình hoành độ giao điểm của A và Δ :

$\left(3a^2-6a+m\right)(x-a)+a^3-3a^2+ma+4-m=x^3-3x^2+mx+4-m$

$\leftrightarrow(x-a)^2(x+2a-3)=0$

Vậy $\Delta\cap\left(C_m\right)$ tại $M(3-2a,y(3-2a))$

Với $y(3-2a)=-8a^3+24a^2-18a-2ma+2m+4=(-8a+8)\left(a^2-2a-1\right)-10a-2m$

Do $a^2-2a-1+m=0$ nên $a^2-2a-1=-m$. Suy ra $y(3-2a)=6ma-6m-10a+12$

Ta được: $M(3-2a,6ma-6m-10a+12)$ nên

$\overrightarrow{IM}=(2(1-a),(6m-10)(a-1))$

Vecto chỉ phương của d là $\vec{u}=(-1,1)$

Mà tam giác MAB cân tại M $\leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\vec{u}=0$

$\leftrightarrow 1+3m-5=0\leftrightarrow m=\frac{4}{3}($ do $a\neq 1)$

Đối chiếu điều kiện $m<2$, ta được

Đáp số: $m=\frac{4}{3}$

Câu 2. (2,0 điểm) Điều kiện: $x^2 \le 1, 2y - y^2 = 1-(y-1)^2 \ge 0 \leftrightarrow (y-1)^2 \le 1$

Ta có: (1) $\leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y^2 + 2$

$\leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1)$

Xét $f(x) = x^3 - 3x$ thì $f'(x) = 3x^2 - 3 \le 0 \forall x \in [-1,1]$ và $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = \pm 1$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-1,1]$.

Mà $x, y-1 \in [-1,1]$ nên $f(x) = f(y-1) \leftrightarrow x = y-1$

Thay vào phương trình (2) được

$x^2 + 2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-x^2} = 0$

$\$\leftrightarrow x^2 + 2 = 2\sqrt{1-x^2} \leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4\left(1-x^2\right) \leftrightarrow x^4 + 8x^2 = 0\$$

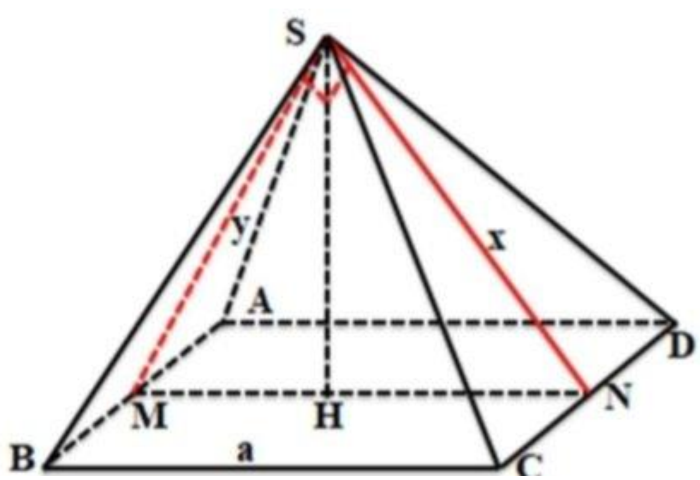
$\leftrightarrow x = 0$ nên $y = 1$ (thỏa mãn điêu kiện)

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0;1)$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Dễ có tam giác SAC đều. Gọi O là tâm ABCD thì khoảng cách từ A đến (SCD) bằng 2 lần khoảng cách d từ O đến (SCD). Gọi N là trung điểm CD thì $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{14}{3a^2}$ nên $d_{A,(SCD)} = \frac{a.\sqrt{42}}{7}$

b)



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Do hai mặt bên (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau nên góc $MSN = 90^\circ$.

Đặt $SM = y, SN = x$. Tam giác SMN vuông tại S nên ta có: $x^2 + y^2 = a^2$ (Do $MN = a$).

Mặt khác: $S_{\vartriangle SBB} + S_{\vartriangle SCD} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot SN \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot y \cdot a + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \mathrm{a} = \frac{a}{2} \cdot (x+y) = \frac{7a^2}{10} \Rightarrow x + y = \frac{7a}{5}$.

Do đó ta có: $S_{SMN}=\frac{1}{2}\cdot xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{49a^2}{25}-a^2\right)=\frac{6a^2}{25}$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Gọi $\overline{a_1a_2\ldots a_7}$ là số thỏa mãn đề bài với $\begin{cases}1\leqslant a_1\leqslant 9;0\leqslant a_2,a_3,\ldots,a_7\leqslant 9\\ a_1+a_2+\cdots+a_7=59(1)\end{cases}$

Vậy số phần tử của không gian mẫu là số nghiệm của (1).

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left(10-a_1\right)+\left(10-a_2\right)+\cdots+\left(10-a_7\right)=11$ hay $x_1+x_2+\cdots+x_7=11(*)$ trong đó $x_i=10-a_i\Rightarrow 1\leqslant x_1\leqslant 9$ và $1\leqslant x_2,x_3,\ldots,x_7\leqslant 10$. Do các x_i trong nghiệm của $(*)$ không vượt quá 10 nên số nghiệm của $(*)$ là C_{10}^6. Vậy $|\Omega|=C_{10}^6$.

Có $\overline{a_1a_2\ldots a_7}$ chi hết cho 11 nên $\left|\left(a_1+a_3+a_5+a_7\right)-\left(a_2+a_4+a_6\right)\right|=11;22;33;\ldots$. Kết hợp với (1) ta được $a_2+a_4+a_6=24$ (2) và $a_1+a_3+a_5+a_7=35$ (3). Phương trình (2) tương đương $\left(10-a_2\right)+\left(10-a_4\right)+\left(10-a_6\right)=6$ nên tương tự (1) có số nghiệm là C_5^2.

Phương trình (3) tương đương $\left(10-a_1\right)+\left(10-a_3\right)+\left(10-a_5\right)+\left(10-a_7\right)=5$ nên tương tự (1)

có số nghiệm là C_4^3.

Vậy số các số có 7 chữ số có tổng là 59 và chia hết cho 11 là $\left|\Omega_A\right|=C_5^2\cdot C_4^3$. Do đó xác suất của biến cố cần tìm là $P(A)=\frac{C_5^2\cdot C_4^3}{C_{10}^6}=\frac{4}{21}$.

Câu 5.

Trước hết, ta chứng minh: $a_k=k\cdot C_{2n}^k\forall k:1\le k\le 2n$ bằng quy nạp

Với $k=1,a_k=C_{2n}^1=2n$. Đúng.

Giả sử $a_k=k\,.\,C_{2n}^k$ với $k\ge 1,k\le 2n-1$

Xét $a_{k+1}=\frac{k\cdot C_{2n}^k(2n-k)}{k}=C_{2n}^k(2n-k)=\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(2n-k)=\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}(k+1)=(k+1)C_{2n}^{k+1}$

Mặt khác, có: $kC_{2n}^k=2n\cdot C_{2n-1}^{k-1}$ nên $a_k=2n\cdot C_{2n-1}^{k-1}$

Lại có: $C_{2n-1}^0<C_{2n-1}^1<C_{2n-1}^2<\cdots<C_{2n-1}^{n-1}=C_{2n-1}^n>C_{2n-1}^{n+1}>C_{2n-1}^{n+2}>\cdots C_{2n-1}^{2n-1}$

Nên $a_1<a_2<\cdots<a_n=a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots>a_{2n}$

Vậy $\sum_{k=1}^{2n}a_k<2n\cdot a_{n+1}$

Mà $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n\sum_{i=0}^{2n-1} C_{2n-1}^{\;i} = 2n\cdot 2^{2n-1}$

Nên $a_{n+1} > 2^{2n-1}$.

Vì $a_n = a_{n+1}$ nên ta được: $2a_n - a_{n+1} = a_{n+1} > 2^{2n-1}$

Đây là điều phải chứng minh

Câu 6.

Ta có : $(x_i - x_j)^2 = \; n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ và $\sum_{1\le i<j\le k}\left(x_i - x_j\right)^2 = k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2$

Bất đẳng thức trở thành: $n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ge T(n,k)\left[k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right]$

Nhận xét rằng chỉ cần xét $T(n,k) > 0$. Ngoài ra bên vế trái có $n-k$ biến không xuất hiện ở bên phải và vế trái nhỏ nhất khi các biến đó bằng nhau. Vậy ta xét khi tất cả các biến đó bằng 0

$$n\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \ge T(n,k)\left[k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right]$$

Hay $(T(n,k)-1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 \ge (kT(n,k)-n)\sum_{i=1}^{k} x_i^2$

Nếu $kT(n,k) - n > 0$, có thể chọn $\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ sao cho $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$ và $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \ne 0$ mâu thuẫn.

Vậy có $kT(n,k) - n \le 0$ hay $T(n,k) \le \frac{n}{k}$.

Bây giờ ta cần chứng minh $n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ge \frac{n}{k}\left[k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right]$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Bất đẳng thức tương đương với $n\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{n}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz $n\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \ge \frac{n}{n-k}\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i\right)^2$

Ta chỉ còn phải chứng minh $\frac{n}{n-k}A^2 \ge (A+B)^2 - \frac{n}{k}B^2$ với $A = \sum_{i=k+1}^{n} x_i$ và $B = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $(kA - (n-k)B)^2 + k(n-k)B^2 \ge 0$ nên luôn đúng.

Vậy $T(n,k) = \frac{n}{k}$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn