SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI THÁNG LẦN 5 LỚP 10 TOÁN

NĂM HỌC 2021 - 2022

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1. [3,0 điểm]

1. Cho đa thức P(x) bậc ba thỏa mãn $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ với mọi $x \geq 2022$. Tính $P(1)$
2. Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) - (x+1)P(x-1) = 4P(x)$ với mọi x
   a) Tính $P(0), P(1), P(-1)$
   b) Tìm tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 2. [3,0 điểm]

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, gần A hơn, trong đó C trên đường tròn (O) và C' trên đường tròn (O'), CA cắt (O') tại F, DA cắt (O) tại G, GC và FD cắt nhau tại H, BA cắt HG tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác FGH và CHD cắt nhau tại N khác H.

a) Chứng minh tam giác HCD cân và hai tam giác GCB, DFB đồng dạng
b) Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, HB cắt CD tại R. Chứng minh N,R,S thẳng hàng
c) Chứng minh rằng B,C,M,N nằm trên một đường tròn.

Câu 3. [2,0 điểm]

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$
b) Tìm tất cả các cặp số $(n;p)$ với n tự nhiên và p nguyên tố thỏa mãn $p(p-1) = 2\left(n^3+1\right)$.

Câu 4. [2,0 điểm]

Cho S là tập hợp có n phần tử và gọi N là số nguyên thỏa mãn $0 \leq N \leq 2^n$. Thực hiện việc tô màu tất cả các tập con của S bởi hai màu xanh và đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

i) Hợp hai tập màu đỏ là màu đỏ
ii) Hợp hai tập màu xanh là màu xanh
iii) Có đúng N tập màu đỏ.

a) Chỉ ra 1 cách tô màu khi $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$ và $N = 5$
b) Chứng minh với mọi n và N thỏa mãn điều kiện trên, luôn tồn tại cách tô màu thỏa mãn.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 5 LỚP 10 TOÁN

NĂM HỌC 2021-2022

Câu 1. [Đa thức]

3. Cho đa thức P(x) bậc ba thỏa mãn $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ với mọi $x \geq 2022$. Tính $P(1)$
4. Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) - (x+1)P(x-1) = 4P(x)$ với mọi x
   c) Tính $P(0), P(1), P(-1)$
   d) Tìm tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn điều kiện trên.

Lời giải:

1. Do $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ với mọi $x \geq 2022$ nên $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 25$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $P(1) = 25$

2.
a) Cho $x = 1$ và $x = -1$ trong điều kiện $(x-1)P(x+1) - (x+1)P(x-1) = 4P(x).$ (1)

Ta được $-2P(0) = 4P(1)$ và $-2P(0) = 4P(-1)$

Cho $x = 0$ trong (1), ta được $-P(1) - P(-1) = 4P(0)$, giải hệ điều kiện thu được, ta có $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$.

b) Vậy $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x)$, với $Q(x)$ là một đa thức hệ số thực. Thay vào (1) được

$(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) - (x+1)(x-1)(x-2)xQ(x-1) == 4x(x-1)(x+1)Q(x)$ với mọi x

Suy ra $(x+2)Q(x+1) - (x-2)Q(x-1) = 4Q(x) \forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, \pm 1$

Nên $(x+2)Q(x+1) - (x-2)Q(x-1) = 4Q(x) \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Cho $x = 2$ trong (2), ta được $Q(3) = Q(2)$.

Bằng quy nạp k, chứng minh được $Q(k) = Q(2)$ với mọi $k \geqslant 2$.

Thật vậy, giả sử $Q(k) = Q(2)$ với $k = 2, 3, \ldots, m$, với $m \geqslant 3$.

Cho $x = m$ trong (2), ta được $(m+2)Q(m+1) - (m-2)Q(m-1) = 4Q(m)$,

Suy ra $(m+2)Q(m+1) = (m+2)Q(2)$, tức là $Q(m+1) = Q(2)$.

Suy ra $Q(k) = Q(2)$ với mọi $k \geqslant 2$.

Vậy $Q(x) = Q(2) = a$

Vậy $P(x) = ax(x-1)(x+1)$.

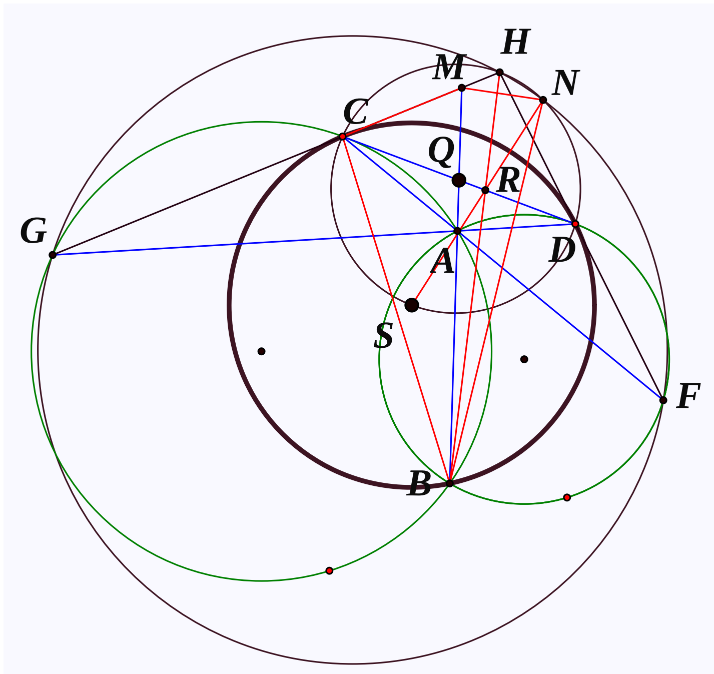
Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 2. [Hình học phẳng] Cho (O) và (O’) cắt nhau tại A và B, CD là tiếp tuyến chung gần A hơn với C trên (O) và C’ trên (O’), CA cắt (O’) tại F, DA cắt (O) tại G, GC và FD cắt nhau tại H, BA cắt HG tại M. đường tròn ngoại tiếp tam giác FGH và CHD cắt nhau tại N khác H.

d) Chứng minh tam giác HCD cân và hai tam giác GCB, DFB đồng dạng
e) Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, HB cắt CD tại R. Chứng minh N,R,S thẳng hàng

f) Chứng minh rằng B,C,M,N nằm trên một đường tròn.

Lời giải:



(1) N,R,S thẳng hàng.

Ta có tam giác NGC và NDF đồng dạng và N là điểm Miquel với các đường thẳng HG,HF,GD,FC, nên tam giác HCD cân và hai tam giác GCB, DFB đồng dạng

Vậy HDBC và HCBF là tứ giác nội tiếp , $\frac{CR}{RD}=\frac{BG}{BD}=\frac{GC}{DF}=\frac{NC}{ND}$ và NR phân giác góc $\angle CND$ do đó đi qua S. Dễ thấy S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

(2) NBSQ là tứ giác nội tiếp .

$$SB^2=SD^2=SQ\cdot SH$$

và SB là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBQ, do $\angle SNH=\angle HQR=90^\circ$, ta có HQRN là tứ giác nội tiếp . Vậy $\angle SNQ=\angle SHB=\angle SBQ$ và NBSQ là tứ giác nội tiếp

Khi đó do N,R,S thẳng hang và S là điểm chính giữa cung CD của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHD. Vậy nếu Q là trung điểm CD thì NBSQ là tứ giác nội tiếp

Vậy $\angle NBM=\angle NBQ=\angle NSH=\angle NCM$ và NCBM là tứ giác nội tiếp

Câu 3. [Số học]

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^5+p^3+2=q^2-q$

d) Tìm tất cả các cặp số $(n;p)$ với n tự nhiên và p nguyên tố thỏa mãn $p(p-1)=2\left(n^3+1\right)$.

Lời giải:

a) Đáp số: $(p;q)=(2;7)$ and $(p;q)=(3;17)$.

+) Nếu $p=2$ hoặc $p=3$, thì $q=7$ hoặc $q=17$ tương ứng

+) Nếu $p>3$. Phương trình thành $p^3\left(p^2+1\right)=(q+1)(q-2)$.

($q+1$, $q-2$) bằng 1 hoặc 3 mà $(q+1)(q-2) \vdots p^3$ và $p\neq 3$ nên chỉ có 1 số trong 2 số $q+1$ hoặc $q-2$ chia hết cho p, và nó cũng chia hết cho p^3.

- Nếu $(q+1) \vdots p^3$, thì $q+1\geqslant p^3$, nếu $(q-2) \vdots p^3$, thì $q-2\geqslant p^3$.

Vậy luôn có $q\geqslant p^3-1$. Ta được $p^5+p^3=(q+1)(q-2)\geqslant p^3\left(p^3-3\right)$, nên $p^2+1\geqslant p^3-3$,

Tức là $0\geqslant p^3-p^2-4=(p-2)\left(p^2+p+2\right)$, không thể với $p>2$. Vậy không có nghiệm nào thỏa mãn $p>3$

e) $(n;p)=(20;127)$.

Phương trình thành $p(p-1)=2\left(n^3+1\right)$ không đúng với $p=2$ và n nguyên dương.

Với $p\geqslant 3$ thì p lẻ và $(n+1)\left(n^2-n+1\right)$ chia hết cho p.

1. Nếu $(n+1) \vdots p$, thì $n+1=kp$ với số nguyên dương k. Suy ra $n+1\geqslant p$. Từ (1) có
$p(p-1)=2(n+1)\left(n^2-n+1\right)\geqslant 2p\left(n^2-n+1\right)$, nên $p-1\geqslant 2n^2-2n+2$. Suy ra $n\geqslant p-1\geqslant 2n^2-2n+2$
$2n^2-3n+2\leqslant 0$, mâu thuẫn.

2. Vậy $n^2-n+1 \vdots p$, tức là $n^2-n+1=kp$

Thay lại ta được $p-1=2k(n+1)$ hay $p=2kn+2k+1$.

Suy ra $n^2-n+1=2k^2n+2k^2+k$ hay $n^2-\left(2k^2+1\right)n-\left(2k^2+k-1\right)=0$

$\Delta=\left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right)$ là số lẻ, $\Delta>\left(2k^2+1\right)^2$; mặt khác $\Delta<\left(2k^2+5\right)^2$

$(\left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right)<\left(2k^2+5\right)^2 \leftrightarrow 4\left(2k^2+k-1\right)<\left(4k^2+6\right)\cdot 4 \leftrightarrow k-7<2k^2.)$

Vậy $\Delta=\left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right)=\left(2k^2+3\right)^2$ nên
$4\left(2k^2+k-1\right)=\left(2k^2+3\right)-\left(2k^2+1\right)=\left(\left(4k^2+4\right)\cdot 2 \leftrightarrow 2k^2+k-1=2k^2+2\right.$

Vậy $k=3$ nên $n=20$ và $p=127$

Câu 4. [Tổ hợp]

Cho S là tập hợp có n phần tử và gọi N là số nguyên thỏa mãn $0\leq N\leq 2^n$.

Thực hiện việc tô màu tất cả các tập con của S bởi hai màu xanh và đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

iv) Hợp hai tập màu đỏ là màu đỏ
v) Hợp hai tập màu xanh là màu xanh
vi) Có đúng N tập màu đỏ.

c) Chỉ ra 1 cách tô màu khi $n=3$, $S=\{1,2,3\}$ và $N=5$

d) Chứng minh với mọi n và N thỏa mãn điều kiện trên, luôn tồn tại cách tô màu thỏa mãn.

Lời giải

a) Chẳng hạn: Các tập $\varnothing$, $\{1\},\{1,2\}$ tô xanh, còn lại tô đỏ là 1 phương án thỏa mãn.

b) Ta quy nạp theo n.

+) $n=1$ hiển nhiên

+) Giả sử có thể tô màu các tập con của $S_n = \{1,2,\ldots,n\}$ với mọi số N_n mà $0 \le N_n \le 2^n$ thỏa mãn đề bài.

Xét tập $S_{n+1}=\{1,2,\ldots,n,n+1\}$ và số N_{n+1} mà $0 \le N_{n+1} \le 2^{n+1}$.

(th 1) $0 \le N_{n+1} \le 2^n$. Áp dụng giả thiết quy nạp với S_n và $N_n = N_{n+1}$, ta có thể tô màu các tập con của S_n thỏa mãn cả ba điều kiện. Tất cả các tập con của S_{n+1} chưa tô sẽ chứa $n+1$; ta tô xanh hết. Khi đó cách tô màu sẽ thỏa mãn đề bài.

(th 2) $2^n+1 \le N_{n+1} \le 2^{n+1}$. Theo trường hợp trên , Tồn tại cách tô màu các tập con của S_{n+1} thỏa mãn hai điều kiện đầu và có đúng $2^{n+1}-N_{n+1}$ tập đỏ. Bây giờ ta đổi màu các tập như sau: Nếu tập đang xanh, ta đổi sang đó, tập đang đỏ, ta đổi sang xanh. Vậy là xong.