SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN IV- KHỐI 10
NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: **(2,0 điểm)**

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 3; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}. \forall n \geq 1$.

CMR: (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2: (2,0 điểm) Cho các số thực dương a; b; c thỏa mãn $a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

Bài 3: **(3,0 điểm)** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O). Lấy D trên cạnh BC, từ D kẻ đường song song AB cắt AC tại E và đường song song AC cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại H.

a) CMR: HD là phân giác $\angle BHC$.
b) CMR: Đường tròn ngoại tiếp (AEF) đi qua O.
c) CMR: AEFH là hình thang cân.

Bài 4: (1,5 điểm) Cho $p_1; p_2; ...; p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. CMR: $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ có ít nhất 2^{n+1} ước nguyên dương.

Bài 5: (1,5 điểm) Cho 100 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Đếm số cách chọn ra 3 số trong 100 số đó sao cho 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Hướng dẫn chấm

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 3; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}.\forall n \ge 1$.

CMR (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}$

Ta CM $u_n > 1$ bằng quy nạp

- Với n = 1 => đúng
- Giả sử có $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3} > \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 = 1$

Khi đó $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{4}.\frac{3 - 3u_n^2}{\sqrt{u_n^2+3} + 2u_n} < 0$

=> (u_n) là dãy số giảm.

Cách khác: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3}$ => f'(x) > 0.

Mà dãy bị chặn dưới bởi số 1 => dãy có giới hạn hữu hạn bằng x.

=> $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3}$ => x = 1.

Bài 2: Cho số thực dương a; b; c thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge 3$$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Dự đoán: $\frac{1}{x^2+1} \ge -\frac{1}{2}x + 1, \forall x > 0$ (1)

Thật vậy: BĐT ⇔ $2 \ge (x^2+1)(-x+2)$ ⇔ $x^3 - 2x^2 + x \ge 0$ ⇔ $x(x-1)^2 \ge 0$

Áp dụng BĐT (1) cho số $b > 0$ ta được $\frac{1}{b^2+1} \geq -\frac{1}{2}b+1$ (2). Vì $a+1>0$ nên

$\frac{a+1}{b^2+1} \geq \left(-\frac{1}{2}b+1\right)(a+1) \Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \geq -\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b+a+1.$

Tương tự, cộng lại ta được

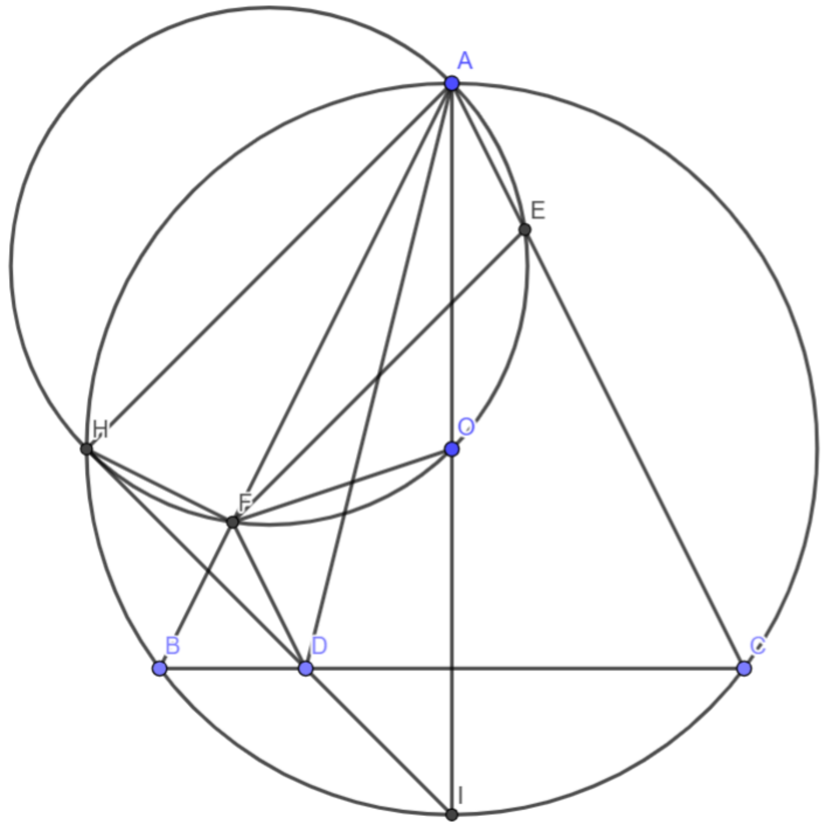
$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geq -\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{2}(b+c+a)+(a+b+c)+3.$

Cuối cùng sử dụng BĐT $(ab+bc+ca) \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c=3$ ta thu được

$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$. Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b = c = 1.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O). Lấy D trên cạnh BC, từ D kẻ đường song song AB cắt AC tại E và đường song song AC cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại H.

a) CMR: HD là phân giác $\angle BHC$
b) CMR: Đường tròn ngoại tiếp (AEF) đi qua O.
c) CMR: AEFH là hình thang cân



a) (AEF) cắt (O) tại H
   ⇨ Tồn tại phép VTQ_H:

   Biến $F \to B; E \to C$

   ⇨ HFB đồng dạng HEC
   ⇨ $\frac{HB}{HC} = \frac{BF}{CE}$

   Mà FBD và EDC là hai tam giác cân đồng dạng => $\frac{FB}{EC} = \frac{BC}{CD}$

   ⇨ $\frac{HB}{HC} = \frac{BC}{CD}$ => HD là phân giác góc BHC
b) Ta có $\widehat{FBO} = \widehat{BAO} = \widehat{OAE}$ => tam giác OBF = OAE (c;g;c)
   ⇨ OE = OF và $\widehat{EOF} = \widehat{AOB} = 180^0 - \widehat{BAC}$ => O thuộc (AEF)
c) Gọi I là điểm chính giữa cung BC không chứa A => A; O; I thẳng hang
   ⇨ $\widehat{ABI} = \widehat{ACI} = 90^0$
   ⇨ $IE^2 - IF^2 = (IC^2 + CE^2) - (IB^2 + BF^2) = CE^2 - BF^2 = DE^2 - DF^2$. ÁP dụng ĐL 4 điểm => ID ⊥ EF.

   Mà ID ⊥ AH => EF // AH. Hình thang AHFE nội tiếp đường tròn thì AHFE là hình thang cân.

Bài 4: Cho $p_1; p_2; ...; p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. CMR: $2^{p_1p_2\cdots p_n}+1$ có ít nhất 2^{n+1} ước nguyên dương.

Hướng dẫn: Ta chứng minh mệnh đề theo quy nạp.

- Với n = 1. Ta CM: S = $2^{p_1}+1$ có ít nhất 4 ước nguyên dương.

Vì $p_1 > 3$ nên p_1 lẻ và không chia hết cho 3. Hiển nhiên S có 2 ước là 1 và chính nó. Và $2^{p_1}+1$ chia hết cho 2 + 1 = 3. Do đó S có thêm ước là 3 và $\frac{2^{p_1}+1}{3}$.

Mà $v_3(2^{p_1}+1) = v_3(3) + v_3(p_1) = 1$. Tức là $\frac{2^{p_1}+1}{3}$ không chia hết cho 3.

Nên S có ít nhất 4 ước là: 1; 3; $\frac{2^{p_1}+1}{3}; 2^{p_1}+1$.

- Giả sử mệnh đề đúng đến n = k, ta CM mệnh đề cũng với n = k + 1

Xét số S = $2^{p_1p_2\cdots p_kp_{k+1}}+1$, ta cần CM có ít nhất 2^{n+2} nghiệm.

Bổ đề 1: Với a lẻ không chia hết cho 3 thì $3 \mid 2^a+1$ nhưng $9 \nmid 2^a+1$

Vì a lẻ nên 2^a+1 chia hết cho 3, và $v_3(2^a+1) = v_3(2+1) + v_3(a) = 1$ nên nó không chia hết cho 9.

Bổ đề 2: Với a và b là số lẻ không chia hết cho 3 và (a;b) = 1 thì $(2^a+1; 2^b+1) = 3$

Gọi d là 1 ước nguyên tố chung của 2^a+1 và 2^b+1 => $\begin{cases} d \mid 2^a+1 \mid 2^{2a}-1 \\ d \mid 2^b+1 \mid 2^{2b}-1 \end{cases}$

Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $d \mid 2^k - 1$

⇨ $\begin{cases} k \mid 2a \\ k \mid 2b \end{cases}$. Mà (a;b) = 1 nên k = 2, tức là d = 3.

Do bổ đề 1 nên chúng cùng không chia hết cho 9, nên $(2^a+1; 2^b+1) = 3$.

- Trở lại bài toán, áp dụng bổ đề trên ta có với S = $2^{p_1p_2\cdots p_kp_{k+1}}+1$ thì

$\begin{cases} S \vdots 2^{p_1p_2\cdots p_k}+1 \\ S \vdots 2^{p_{k+1}}+1 \end{cases}$ và $(2^{p_1\cdots p_k}+1; 2^{p_{k+1}}+1) = 3$; $v_3(2^{p_{k+1}}+1) = 1$

⇨ $\left(2^{p_1p_2\cdots p_k}+1; \frac{2^{p_{k+1}}+1}{3}\right) = 1$

Theo giả thiết quy nạp, S có đủ cả 2^{k+1} ước của $2^{p_1 \cdots p_k} + 1$, đồng thời lấy mỗi ước đó nhân với $\frac{2^{p_{k+1}}+1}{3}$ ta lại được một ước của S không trùng với 2^{k+1} ước cũ, làm như vậy ta đã tạo ra được thêm 2^{k+1} ước mới. Như vậy số ước của S ít nhất là $2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$.

⇨ Mệnh đề cũng đúng với k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp mệnh đề đúng với mọi n.

Bài 5: Cho 100 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Đếm số cách chọn ra 3 số trong 100 số đó sao cho 3 số được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chú ý: Chọn bộ 3 số từ tập {1;2;…;100} => 1 số được chọn cùng lắm là 1 lần, tức là 3 số được chọn phải là 3 số phân biệt.

Đặt 3 số là a < b < c => $3 \le c \le 100$ =>

Ý tưởng: Chọn c – b và chọn a > c – b.

Có $1 \le c - b \le 49$. Vì nếu $c - b \ge 50$ thì a > 50 và b < 50 => Mâu thuẫn.

TH1: c – b = 1 => a có thể chọn từ 2 đến 98.

+) Nếu a = 2 thì b > 2 => b có thể chọn từ 3 đến 99 => Số bộ (a;b;c): 97

+) Nếu a = 3 thì b > 3 => b thể chọn từ 4 đến 99 => 96 bộ

+) Lam tương tự, ta được tổng số bộ trong TH này là: 97+96+…+1 = 4753

TH2: c – b = 2 => a có thể chọn từ 3 đến 97

+) Nếu a = 3 => b có thể chọn 4 đến 98 => Số bộ (a;b;c) là 95

+) Nếu a = 4 => b có thể chọn từ 5 đến 98 => Số bộ là 94

+) Làm tương tự, tổng số bộ là: 95+94+…+1.

TH3: Tổng quát: c – b = k => a có thể chọn từ k + 1 đến 100 – k – 1.

+) Nếu a = k + 1; b có thể chọn từ k + 2 đến 100 – k. => Số bộ là: 99 – 2k.

+) Làm tương tự, tổng số bộ là: (99-2k) + (99-2k-1) + … + 1 = $\frac{(99-2k).(99-2k+1)}{2}$

Vậy ta được tổng số bộ là:

$$\sum_{k=1}^{49} \frac{(99-2k)(100-2k)}{2} = \sum_{k=1}^{49} \frac{9900-398k+4k\hat{}2}{2} = 4950.49 - 199\sum_{k=1}^{49} k + 2\sum_{1}^{49} k^2$$