

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 09/11/2020

Câu 1: (3,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.
- b) Tìm x, y biết $x^2 + y^2 = 5$ và $\log_4 x = \log_9 y = \log_6 \frac{2x+y}{2\sqrt{2}}$.
- c) Dùng các chữ số từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ để lập thành số có 4 chữ số (các chữ số có thể dùng nhiều lần hoặc không dùng lần nào). Tính xác suất để số lập được có đúng 2 chữ số 1 và 2 chữ số còn lại khác nhau.

Câu 2: (1,0 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ không phải là hằng số sao cho $P(Q(x)^2) = P(x).Q(x)^2$ với mọi số thực x .

Câu 3: (1,0 điểm)

Tìm cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn: $20^m - 10m^2 + 1 = 19^n$.

Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có đường cao BD, CE cắt nhau tại H . M là trung điểm BC , I là trung điểm AH , N là trung điểm DE .

- a) CMR: M, I, N thẳng hàng.
- b) Gọi P, Q là trung điểm ME, MD . Đường thẳng qua A song song BC cắt đường trung trực của AM tại J . CMR: P, Q, J thẳng hàng.

Câu 5: (2,0 điểm) Cho bảng ô vuông $m \times n$. Kí hiệu miếng ghép loại A là miếng ô vuông 2×2 , miếng ghép loại B là miếng 1×4 hoặc 4×1 .

- a) Tìm m và n sao cho bảng ô vuông $m \times n$ có thể lấp kín bằng cách ghép các miếng loại A và B không chồng lên nhau. (Có thể chỉ cần dùng 1 loại).
- b) Với mỗi cách ghép kín bảng $m \times n$, chứng minh nếu ta thay một miếng loại A thành 1 miếng loại B hoặc ngược lại, ta không thể ghép kín bảng $m \times n$ được nữa.

Hướng dẫn chấm

Câu 1:

a) Xét phương trình: $x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2 = 0$ (1)

Hay: $(x-1)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì pt: $x^2 + (m+3)x + m^2 = 0$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là:

1) $\Delta = (m+3)^2 - 4m^2 > 0$

2) $1 + (m+3) \cdot 1 + m^2 \neq 0$

Giải ra ta được: $-1 < m < 3$. Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$

b) Điều kiện: $x, y > 0$.

Có: $\log_4 x = \log_9 y = t$ thì $x = 4^t, y = 9^t$, nên $xy = 36^t$

Do đó: $t = \log_{36} xy = \log_6 \frac{2x+y}{2\sqrt{2}} \Rightarrow (2x+y)^2 = 8xy \Rightarrow y = 2x$.

Thay vào pt $x^2 + y^2 = 5$ ta được $x = 1, y = 2$.

c) - Không gian mẫu: Số số có 4 chữ số lập từ các chữ số trong A.

Gọi số có 4 chữ số là abcd thì a có 5 cách chọn, b có 6, c có 6 và d có 6.

Số phần tử của không gian mẫu là: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

- Gọi số có 4 chữ số mà có đúng 2 chữ số 1 và 2 chữ số còn lại khác nhau là abcd

TH1: $a = 1$. Chọn vị trí chữ số 1 còn lại: 3 cách

Chọn 2 chữ số từ 5 chữ số còn lại rồi xếp vào 2 vị trí còn lại: A_5^2

TH2: $a \neq 1$. Chọn a có 4 cách.

Chọn 2 vị trí cho 2 chữ số 1: C_3^2

Chọn chữ số còn lại: 4 cách.

Số số có 4 chữ số mà có đúng 2 chữ số 1 và 2 chữ số còn lại khác nhau là:

$3 \cdot A_5^2 + 4 \cdot C_3^2 \cdot 4 = 108$. Vậy xác suất là: $\frac{1}{10}$

Câu 2: Gọi bậc của P là m, bậc của Q là n, ta có: $2mn = m + 2n$

Do đó: $(m-1)(2n-1)=1$, suy ra $m = 2, n = 1$.

P(x) bậc 2 nên $P(x) = ax^2 + bx + c$

Thay vào ta được: $aQ^2(x) + bQ(x) + c = P(x)Q(x)$. Do $\deg Q = 1$ nên tồn tại $Q(x_0) = 0$

Thay vào ta có $c = 0$ và $P(x) = aQ^2(x) + bQ(x)$

Q(x) bậc 1 nên $Q(x) = px + q$. Thay vào ta được: $P(x) = a(px + q)^2 + b(px + q)$

Đồng nhất hệ số với P(x), ta được $p = \pm 1 \Rightarrow P(x) = ax^2 \pm 2axq + aq^2 + b$

$\Rightarrow 2aq = \pm b$ và $aq^2 + b = 0$

Giải ra ta được: $Q(x) = \pm x$ và $P(x) = ax^2$

$$Q(x) = \pm(x - 2), P(x) = ax^2 - 4ax$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 3: Nếu $m = 0$, thay vào vô lí

Do đó $m > 0$. Lấy mod 10 suy ra $19^n - 1 : 10$ nên n chẵn.

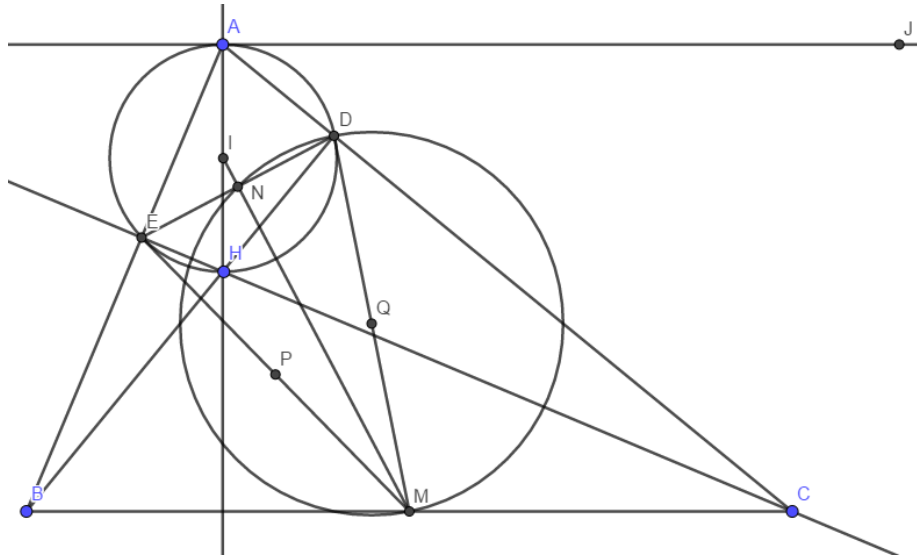
Lấy mod 20 ta được $10m^2 : 20$ nên m chẵn.

Đặt $m = 2k, n = 2l$, thay vào ta được: $40k^2 - 1 = (20^k - 19^l)(20^k + 19^l)$

Do đó $20^k - 19^l > 0 \Rightarrow 20^k - 19^l \geq 1 \Rightarrow 40k^2 - 1 \geq 20^k + 1$

Điều này chỉ đúng khi $k = 1$. Thay vào ta được $m = n = 2$.

Câu 4:



a) Để chứng minh $ME = MD$, $IE = ID$. Do đó IM là đường trung trực của DE .

Vậy M, I, N thẳng hàng.

b) Xét đường tròn tâm P đường kính ME , tâm Q đường kính MD , tâm J bán kính $JA = JM$. Ta có 3 đường tròn này có cùng trục đẳng phương.

Có $\angle IEM = \angle IDM = \angle IAJ = 90^\circ$

Do đó IE tiếp xúc (P), ID tiếp xúc (Q) và IA tiếp xúc (J)

Lại có $IA = ID = IE$ nên I thuộc trục đẳng phương của 3 đường tròn.

Và 3 đường tròn cùng đi qua M .

Nên 3 đường tròn có cùng trục đẳng phương là IM .

Vậy 3 tâm P, Q, J thẳng hàng.

Câu 5:

a) Mỗi miếng đều ghép được 4 ô, nên để ghép kín bảng thì $m.n:4$

Thử lại: Khi m hoặc n chia hết cho 4, ta có thể ghép chỉ bằng miếng loại B

Khi m và n cùng chẵn, ta có thể ghép chỉ bằng miếng loại A.

b) Để lấp kín bảng thì m hoặc n phải là số chẵn, vai trò như nhau, giả sử m chẵn.

Ta tô màu bảng vuông bởi 4 màu 1 2 3 4

1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3

Khi đó, 1 ô vuông loại A sẽ có đủ hết 4 màu 1, 2, 3, 4, còn miếng loại B sẽ chỉ có 2 màu và đều có 2 ô cùng màu.

Nếu ta đổi một miếng loại A thành B hoặc ngược lại, thì số ô màu 1, 2, 3, 4 được ghép bởi các miếng loại B sẽ cùng tăng lên hoặc giảm đi 1.

Mà khi ghép bởi các miếng loại B, số ô mỗi màu luôn là số chẵn. Ban đầu khi ghép được, số miếng loại B đã thỏa mãn điều này, và khi thay, số ô mỗi màu tăng 1 hoặc giảm 1, là số lẻ, điều này không thể xảy ra. Vậy không thể ghép kín được nữa