SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

Ngày thi: 26/11/2018

ĐỀ THI THÁNG LẦN 3 LỚP 11 TOÁN

NĂM HỌC 2018 - 2019

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1. **(2,0 điểm)**

Giải hệ phương trình**:** $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{xy}(1) \\ x^2+y^2-\dfrac{1}{x+y}=1-x^2+2x(2) \end{cases}$

Câu 2. **(2,0 điểm)**

Cho dãy số $(a_n)_{n\ge 1}$ thỏa mãn: $a_1=a_2=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_n+a_{n-1}^2+\dfrac{3}{4})$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3. **(2,0 điểm)**

Tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(P(x))=P(x^n)+P(x)-1$ với mọi x trong đó n là bậc của đa thức

Câu 4. **(2,5 điểm)**

a) Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H, gọi P và Q là chân các đường cao kẻ từ B và C và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng MP và MQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

b) Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm BC. Xét đường tròn ω là đường tròn nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB,AC tại E,F tương ứng. Tiếp tuyến kẻ từ M tới ω tiếp xúc ω tại P và Q sao cho P và B cùng phía bờ AM. Gọi X là giao của PM và BF, Y là giao của QM và CE. Biết 2PM=BC, chứng minh rằng XY tiếp xúc với đường tròn ω

Câu 5. **(1,5 điểm)**

Có thể chọn được hay không 24 điểm trong không gian sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và 2019 mặt phẳng sao cho mỗi mặt phẳng đi qua ít nhất 3 điểm trong số các điểm trên và ứng với mỗi bộ 3 điểm trong số đó, luôn tồn tại ít nhất 1 mặt phẳng được chọn chứa 3 điểm đó?

ĐÁP ÁN THI THÁNG LẦN 3 LỚP 11 TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. Giải hệ phương trình**:** $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{xy}(1) \\ x^2+y^2-\dfrac{1}{x+y}=1-x^2+2x(2) \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} xy \neq 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$

$PT\ 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+y\ ^2-2xy-1}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y\ ^2-1}{xy}+\dfrac{2}{x+y}-2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y\ ^2-1}{xy}+\dfrac{2\ 1-x-y}{x+y}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y-1\quad x+y+1}{xy}+\dfrac{2\ 1-x-y}{x+y}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{array}\right.$

*) Với $x+y=1$ thay vào (2) ta có: $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$ 0,25

*) Với $x^2+y^2+x+y=0$ thay vào (2) ta có:

$1-x^2+2x=x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2+y^2} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}(KTM)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3};\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$

Câu 2. Cho dãy số $(a_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn: $a_1=a_2=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_n+a_{n-1}^2+\dfrac{3}{4})$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải:

Dễ thấy $a_n > 0 \forall n \geq 3$

Ta có $a_2 - a_1 = 0, a_3 - a_2 = \frac{1}{4} > 0$ nên giả sử $a_{n-1} \geq a_{n-2}$ và $a_n \geq a_{n-1}$ thì $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2)$

Từ đó nhờ quy nạp ta được a_n là dãy tăng.

Mặt khác $a_1, a_2, a_3 < 1$ và giả sử $a_{n-1}, a_n < 1$ thì $a_{n+1} < 1$ nên $a_n \in [0,1) \forall n$.

Dãy (a_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên có giới hạn.

Đặt $\lim a_n = l$ thì $l = \frac{1}{3}((l + l^2 + l)$ nên $l = 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$

Câu 3. Tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(P(x)) = P(x^n) + P(x) - 1$ với mọi x trong đó n là bậc của đa thức

Lời giải:

- Nếu $n = 0$, thì $P(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $n = 1$, thì $P(x) = ax + b$ với $a \neq 0$. Suy ra $a(ax + b) + b = 2(ax + b) - 1$.

nên $a^2 = 2a$ và $ab + b = 2b - 1$. Thu được $(a, b) = (2, -1)$, nên $P(x) = 2x - 1$

- Nếu $n \geq 2$ và có ít nhất 2 số hạng trong $P(x)$, gọi số hạng bậc cao thứ nhì của $P(x)$ có bậc m, suy ra $P(x) = a_n x^n + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$, với $a_n, a_m \neq 0$. số hạng bậc cao thứ nhì của bên vế trái có bậc $n^2 - n + m$, trong khi bên vế phải có bậc nm. Từ $n^2 - n + m = n(n-1) + m > m(n-1) + m = nm$, ta được mâu thuẫn.Vậy $P(x) = ax^n$ với a nào đó, so sánh các hệ số của x^0 được $0 = 1$, Mâu thuẫn.

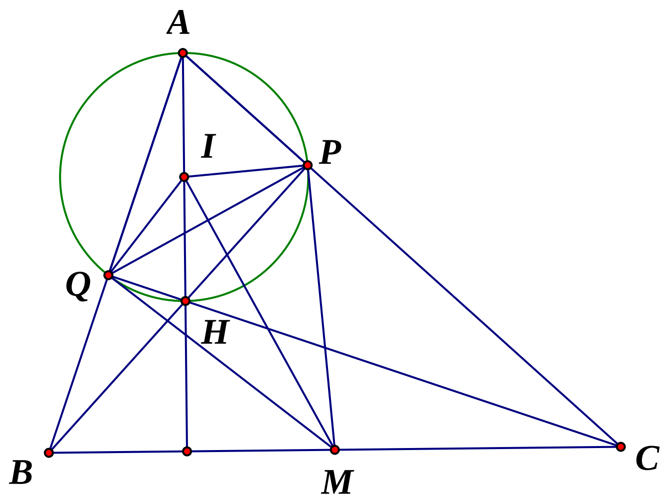
Không tồn tại đa thức thỏa mãn

Vậy đáp số là: $P(x) = 1$ hoặc $P(x) = 2x - 1$.

Câu 4. a) Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H, gọi P và Q là chân các đường cao kẻ từ B và C và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng MP và MQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

b) Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm BC. Xét đường tròn ω là đường tròn nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB,AC tại E,F tương ứng. Tiếp tuyến kẻ từ M tới ω tiếp xúc ω tại P và Q sao cho P và B cùng phía bờ AM. Gọi X là giao của PM và BF, Y là giao của QM và CE. Biết 2PM=BC, chứng minh rằng XY tiếp xúc với đường tròn ω

Lời giải:



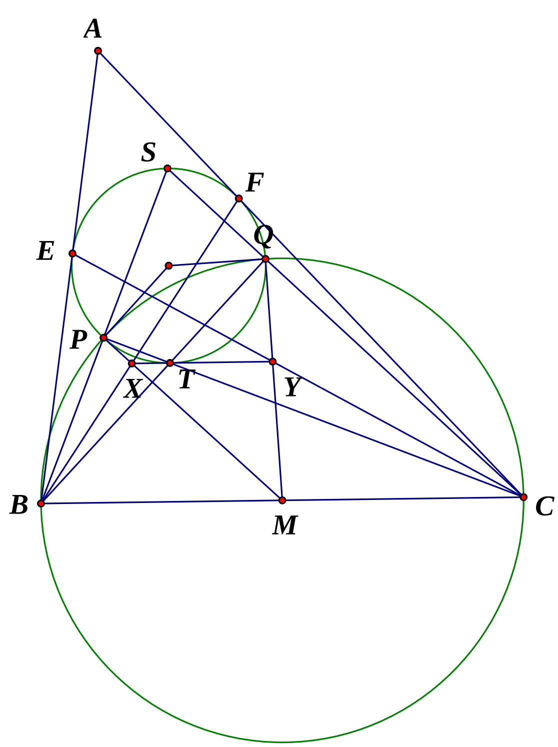
a)

Gọi I là trung điểm AH thì A,H,P,Q thuộc đường tròn tâm I bán kính IA.

Ta có $\angle IQA = \angle IAQ$ và $\angle MQB = \angle MBQ$ nên $\angle IQA + \angle MQB = 90^0$. Suy ra $IQ \perp MQ$ hay MQ là tiếp tuyến của đường tròn (APQ).

Hoàn toàn tương tự có MP là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

b)



Rõ ràng B,P,Q,C nằm trên đường tròn Γ đường kính BC. Gọi $R = BP \cap CQ, S = BQ \cap CP$ thì S là trực tâm tam giác RBC. Đường tròn đường kính RS qua P,Q và trực giao với Γ nên nó trùng với Ω. Giả sử tiếp tuyến tại S của Ω cắt MP tại X' thì do C thuộc đối cực của F, C thuộc đối cực của B và X' thuộc đối cực của P và S nên PS là đường đối cực của X', suy ra C thuộc đường đối cực của X'. Từ đó X',B,F thẳng hàng vì cùng thuộc đường đối cực của C. Suy ra X' trùng X. Tương tự có Y' trùng Y nên ta có điều cần chứng minh.

Câu 5. Có thể chọn được hay không 24 điểm trong không gian sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và 2019 mặt phẳng sao cho mỗi mặt phẳng đi qua ít nhất 3 điểm trong số các điểm trên và ứng với mỗi bộ 3 điểm trong số đó, luôn tồn tại ít nhất 1 mặt phẳng được chọn chứa 3 điểm đó?

Lời giải:

Giả sử có thể, gọi $(P_1),(P_2),\ldots,(P_{2019})$ là các mặt phẳng được chọn và $n_1,n_2,\ldots,n_{2019}$ là số điểm trong số 24 điểm thuộc các mặt phẳng vừa chọn. Ta có $n_i \geq 3 \forall i = 1,2,\ldots,2019$.

Số cách chọn 3 đỉnh bất kỳ từ 24 đỉnh là C_{24}^3. Mặt khác để chọn 3 đỉnh từ 24 đỉnh, luôn tồn tại một mặt chứa 3 đỉnh đó, ta có thể có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Chọn 3 đỉnh thuộc mặt (P_1): Có $C_{n_1}^3$ cách

Trường hợp 2: Chọn 3 đỉnh thuộc mặt (P_2): Có $C_{n_2}^3$ cách

…..

Trường hợp 2018: Chọn 3 đỉnh thuộc mặt (P_{2018}): Có $C_{n_{2018}}^3$ cách

Trường hợp 2019: Chọn 3 đỉnh thuộc mặt (P_{2019}): Có $C_{n_{2019}}^3$ cách

Chú ý rằng các trường hợp này không thể có các cách chọn chung vì không thể chọn 3 đỉnh vừa thuộc mặt (P_i) lại vừa thuộc mặt (P_j).

Từ đó ta có: $C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \cdots + C_{n_{2018}}^3 = C_{24}^3 = 2024$.

Suy ra $n_i \leq 5$ vì nếu có 1 số trong các số n_i lớn hơn 5 thì
$2024 = C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \cdots + C_{n_{2019}}^3 \geq 1 + 1 + \cdots + 1 + C_6^3 = 2038$ (2018 số 1).

Mâu thuẫn.

Giả sử trong các số $n_1,n_2,\ldots,n_{2019}$ có a số bằng 3, b số bằng 4 và c số bằng 5 thì $a+b+c=2019$ và $aC_3^3 + bC_4^3 + cC_5^3 = 2024$.Suyra $3b+9c=5$. Điều này là không thể với b, c là các số nguyên không âm.

Vậy, không thể chọn được theo yêu cầu của đề bài.