SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI THÁNG LẦN 1, NĂM HỌC 2022-2023
Môn: Toán Lớp 11 Toán

Ngày 10/10/2022
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 2. (1,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AC, AD và G là trọng tâm tam giác BCD. Một đường thẳng qua G cắt MN tại I và AB tại J. Tính $\frac{JA}{JB}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho đa thức $f(x) = x^4 - 2001x^3 + (2000 + a)x^2 - 1999x + a$.

a) Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm nguyên của $f(x)$ thì x_0 là số chẵn.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, đa thức $f(x)$ không thể có hai nghiệm nguyên (dù phân biệt hay trùng nhau).

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy điểm D thuộc cạnh BC, các đường tròn $(ABD), (ACD)$ cắt CA, AB ở E, F. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (J) là đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (AEF) ở T, DI cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh rằng $IEDF$ là tứ giác nội tiếp và $ID \perp BC$.

b) Chứng minh rằng K là trực tâm tam giác IBC

c) Tiếp tuyến chung của (I) và (J) cắt BC tại N. Chứng minh rằng $(N, D, B, C) = -1$

d) Chứng minh rằng K, T, M thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm) Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất để phương trình $a^2 + p^3 = b^4$ có nghiệm nguyên dương a, b.

Problem 6. (1,0 point) Prove that any positive integer can be represented as $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2$ for some positive integer n and some choice of the signs.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 1, NĂM HỌC 2022-2023

LỚP 11 TOÁN

Câu 1. (2,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên:

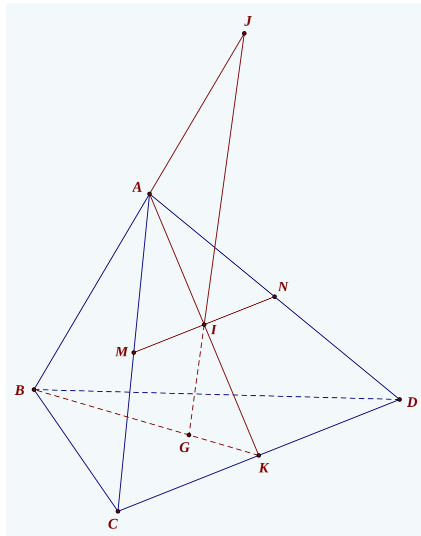
x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Vậy $m \in (-\infty;5]$.

Câu 2. (1,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AC, AD và G là trọng tâm tam giác BCD. Một đường thẳng qua G cắt MN tại I và AB tại J. Tính $\frac{JA}{JB}$.

Lời giải:



Gọi K là trung điểm CD và AK cắt MN tại I, GI cắt AB tại J thì đường thẳng IJ là đường thẳng qua G cắt cả AB và MN. Dễ thấy I là trung điểm MN, tính toán trong tam giác ABK, ta được $\frac{JA}{JB}=2$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho đa thức $f(x)=x^4-2001x^3+(2000+a)x^2-1999x+a$. Chứng minh rằng với mọi số a nguyên, đa thức $f(x)$ không thể có hai nghiệm nguyên (dù phân biệt hay trùng nhau).

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh rằng nếu x_0 là một nghiệm nguyên của $f(x)$ thì x_0 phải là số chẵn.

Thật vậy : $\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f(1)=2a-1999 \end{cases} \Rightarrow f(x_0)-f(1)=$ số lẻ.

Nhưng $f(x_0)-f(1)$ chia hết cho x_0-1 nên x_0-1 là một số lẻ, do đó x_0 chẵn. Ta xét 2 trường hợp :

a) Giả sử $f(x)$ có 2 nghiệm nguyên x_1, x_2 phân biệt, thì :

$$0=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\left(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3\right)-2001\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+(2000+a)\left(x_1+x_2\right)-1999$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_1, x_2 chẵn.

b) Giả sử $f(x)$ có nghiệm kép x_0 (chẵn). Khi đó x_0 cũng là nghiệm của đạo hàm $f'(x)$:

$f'\left(x_0\right)=4x_0^3-6003x_0^2+2(2000+a)x_0-1999=0.$ Đẳng thức này không thể xảy ra vì x_0 chẵn.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy điểm D thuộc cạnh BC, các đường tròn $(ABD),(ACD)$ cắt CA, AB ở E, F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (J) là đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (AEF) ở T, DI cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm BC.

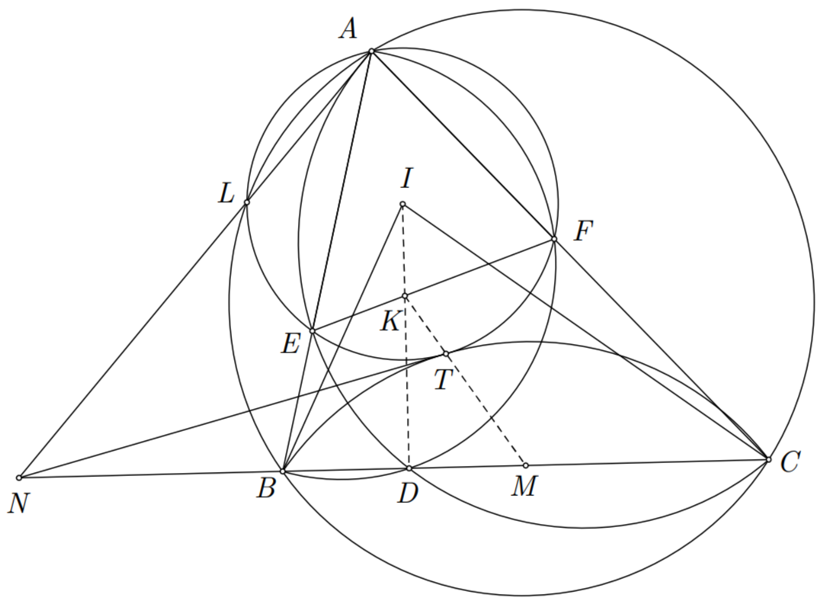
e) Chứng minh rằng $IEDF$ là tứ giác nội tiếp và $ID \perp BC$.

f) Chứng minh rằng K là trực tâm tam giác IBC

g) Tiếp tuyến chung của (I) và (J) cắt BC tại N. Chứng minh rằng $(N, D, B, C) = -1$

h) Chứng minh rằng K, T, M thẳng hàng.

Lời giải:



Gọi I là tâm (AEF). DI cắt EF tại K.(AEF) cắt (O) tại L .Dễ thấy rằng

$\angle EDF = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - \angle EIF$

Nên IEDF nội tiếp. Từ đó, DI là phân giác $\angle EDF$. Hơn nữa $\angle BDF = \angle CDE = \angle BAC$ nên $DI \perp BC$.
Lại có $DB \cdot DC = DF.DE = DK.DI$

Nên K là trực tâm $\triangle IBC$. Ta có AL, BC và tiếp tuyến tại T của $(AEF),(BTC)$ đồng quy, gọi điểm đồng quy là N. Hơn nữa do $\triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC (g \cdot g)$ nên

$$\frac{DB}{DC} = \frac{BD \cdot \mathrm{BC}}{DC \cdot BC} = \frac{BF \cdot BA}{CE \cdot CA} = \frac{LB \cdot AB}{LC \cdot AC} = \frac{NL}{NC} \cdot \frac{NB}{NL} = \frac{NB}{NC}$$

Hay $(ND, BC) = -1$, từ đó TD là đối trung $\triangle TBC$ và NT tiếp xúc (TDM). Mặt khác:

$$DK \cdot DI = DB \cdot DC = DM \cdot DN$$

Nên K là trực tâm ΔIMN. Do đó, ta có được $\angle NMT = \angle NTD = \angle NID = 90^{\circ} - \angle IND = \angle NMK$

Nên K, T, M thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm) Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất để phương trình $a^2 + p^3 = b^4$ có nghiệm nguyên dương a, b.

Lời giải:

Biến đổi về $b^2 + a \quad b^2 - a \; = p^3$, do p là số nguyên tố nên chỉ có hai trường hợp sau xảy ra :

Trường hợp 1: $b^2 + a = p^2$ và $b^2 - a = p$,

Ta tính được $b^2 = \dfrac{p^2 + p}{2} = \dfrac{p(p+1)}{2}$ và $a = \dfrac{p^2 - p}{2}$.

Với $p = 2$ rõ ràng $\dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{2.3}{2} = 3$, không phải là số chính phương.

Với p là số nguyên tố lè thì $\dfrac{p(p+1)}{2} \vdots\, p$ mà $/\, p^2$ nên $\dfrac{p(p+1)}{2}$ cũng không phải số chính phương.

Trong trường hợp này không tồn tại $a; b$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. $b^2 + a = p^3$ và $b^2 - a = 1$, tìm được $b^2 = \dfrac{p^3 + 1}{2}$ và $a = \dfrac{p^3 - 1}{2}$.

Dễ thấy với $p = 2$ không tồn tại $\mathrm{a, b}$ thỏa mãn.

Với p là số nguyên tố lẻ ta có $\dfrac{p^3 + 1}{2} = \dfrac{p+1}{2} \cdot \left(p^2 - p + 1\right) = b^2$ là số chính phương. Lại có

$$\gcd\left(\frac{p+1}{2}; p^2 - p + 1\right) = \gcd\left(p+1, p^2 - p + 1\right) = \gcd(p+1; 3)$$

- Nếu $p + 1/3$ thì $\gcd\left(\dfrac{p+1}{2}; p^2 - p + 1\right) = 1$ dẫn đến $\dfrac{p+1}{2}$ và $p^2 - p + 1$ đều là các số chính phương,

hay có số nguyên dương n để $p^2 - p + 1 = n^2 \Leftrightarrow p(p-1) = (n-1)(n+1)$

Điều này không xảy ra vì $p+1 \vdots 3$ hay $p \equiv 2(\bmod 3)$ và $\gcd\left(\frac{p+1}{2}; p^2-p+1\right)=3$, hay tồn tại x; y nguyên dương để $\frac{p+1}{2}=3x^2$ và $p^2-p+1=3y^2$, viết lại $p=6x^2-1$. Để tìm được p nhỏ nhất ta tìm x nhỏ nhất, với $x=1$ có $p=5$ và $p^2-p+1=25-5+1=21$ không thỏa mãn,

với $x=2$ có $p=23$ và $p^2-p+1=23^2-23+1=3.13^2$.

Vậy số p nhỏ nhất cần tìm là 23 .

Problem 6. (1,0 point) Prove that any positive integer can be represented as $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2$ for some positive integer n and some choice of the signs.

Solution:

We induct on the number to be represented. For the base case, we have

$1=1^2, 2=-1^2-2^2-3^2+4^2, 3=-1^2+2^2, 4=-1^2-2^2+3^2$.

The inductive step is " $P(n)$ implies $P(n+4)$ "; it is based on the identity

$m^2-(m+1)^2-(m+2)^2+(m+3)^2=4.$