SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG	ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN IV
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	NĂM HỌC 2022 - 2023
NGUYỄN TRÃI	MÔN: TOÁN 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (1, 0 điểm) Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ (a là tham số) có giá trị lớn nhất trên [0; 3] là $f(2)$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên [0; 3].

Câu 2: **(2, 0 điểm)** Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD) và SC = $a\sqrt{5}$.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
b) Trên cạnh SA lấy M sao cho SM = x. Mặt phẳng (BCM) chia khối chóp thành 2 phần có thể tích là V_1 và V_2 (V_1 là thể tích phần chứa S). Tìm x để $V_2=2V_1$.

Câu 3: (1, 0 điểm) Cho dãy số (u_n) có $u_1=1; u_2=2023$ và $u_{n+2}^3=u_{n+1}^2.u_n, \forall n\geq 1$. Chứng minh (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Câu 4: (2, 0 điểm) Ta gọi đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ là "đối xứng" nếu $a_n\neq 0$ và $a_k=a_{n-k}, \forall 0\leq k\leq n$.

a) Chứng minh rằng tích hai đa thức "đối xứng" là một đa thức "đối xứng".

b) Chứng minh rằng nếu đa thức hệ số thực P(x) là một nhân tử của đa thức H(x) = $x^n+x^{n-1}+...+x+1$ thì P(x) là đa thức "đối xứng".

Câu 5: (1, 5 điểm) Cho số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng số ab là số lớn nhất không thể viết được dưới dạng $ax+by$ với x, y nguyên dương.

Câu 6: (2, 5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi D và E là trung điểm AB, AC. Một đường tròn (w) qua D, E và tiếp xúc (O) tại K khác A. Tiếp tuyến tại K cắt DE tại S.

a) CMR: SA là tiếp tuyến của (O).
b) Gọi H là chân đường cao từ A xuống BC . Chứng minh rằng KH đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn chấm

Câu 1: (1, 0 điểm) Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ (a là tham số) có giá trị lớn nhất trên [0; 3] là $f(2)$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên [0; 3].

Có $f'(x)=4x^3(a+3)-4ax$

Vì hàm số đạt GTLN trên [0; 3] tại x = 2 => $f'(2)=0$ => $32(a+3)-8a=0$ => $a=-4$

Thay vào ta được: $f(x)=-x^4+8x^2+1$

⇨ $f'(x)=-4x^3+16x=0$ ⇔ $x=-2;0;2$

Thay $f(0)=1; f(2)=17; f(3)=-8$

Câu 2: **(2, 0 điểm)** Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA ⊥ (ABCD) và SC = $a\sqrt{5}$.

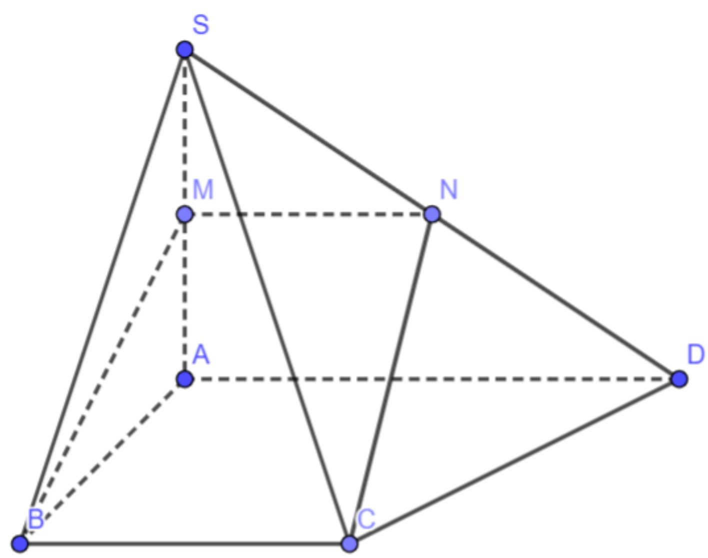
c) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
d) Trên cạnh SA lấy M sao cho SM = x. Mặt phẳng (BCM) chia khối chóp thành 2 phần có thể tích là V_1 và V_2 (V_1 là thể tích phần chứa S). Tìm x để $V_2=2V_1$.

Vì SA ⊥ (ABCD) => SA ⊥ AC

⇨ $SA^2=SC^2-AC^2=SC^2-AB^2-BC^2=3a^2$
⇨ $SA=a\sqrt{3}$
⇨ $V_{SABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}$

$=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}(a+2a)a$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$



b) Từ M kẻ đường thẳng song song AD cắt SD tại N => MN // AD // BC => N thuộc (BMC)

=> (BMC) chia khối chóp thành 2 phần là SBCMN và BCMNAB với $V_1=V_{SBCMN}$

Đặt $\frac{SM}{SA}=y$ => $\frac{SN}{SD}=y$

Có $V_2=2V_1$ => $V_1=\frac{1}{3}V_{SABCD}$

Có $V_1 = V_{SBCM} + V_{SCMN}$

Áp dụng công thức tỉ lệ thể tích trong chóp tam giác => $\frac{V_{SBCM}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} = y$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$ => $V_{BCM} = y.S_{SABC} = \frac{y}{3} V_{SABCD}$

Lại có: $\frac{V_{SCMN}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD} = y^2$ => $V_{SCMN} = y^2 V_{SACD} = \frac{2y^2}{3} V_{SABCD}$

⇨ $V_{SBCMN} = \frac{y+2y^2}{3} V_{SABCD}$ => $\frac{y+2y^2}{3} = \frac{1}{3}$ => $2y^2 + y = 1$ => $y = \frac{1}{2}$ (DO 0 < y < 1)

⇨ $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 3: (1, 0 điểm) Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1; u_2 = 2023$ và $u_{n+2}^3 = u_{n+1}^2.u_n, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng ($u_n$) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Lấy ln 2 vế ta được: $3lnu_{n+2} = 2lnu_{n+1} + lnu_n$

Đặt $a_n = lnu_n$ => $a_1 = 0; a_2 = ln2023$ và $3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

PT đặc trưng: $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ⇔ $x = 1$ hoặc $x = \frac{-1}{3}$

Giải ra ta được: $a_n = \frac{3}{4} ln2023 + \frac{9}{4} ln2023.(\frac{-1}{3})^n \to \frac{3}{4} ln2023$ => $u_n \to 2023^{\frac{3}{4}}$ \

Câu 4: (2, 0 điểm) Ta gọi đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ là “đối xứng” nếu $a_n \neq 0$ và $a_k = a_{n-k}, \forall 0 \leq k \leq n$.

a) Chứng minh rằng tích hai đa thức “đối xứng” là một đa thức “đối xứng”.

b) Chứng minh rằng nếu đa thức hệ số thực P(x) là một nhân tử của đa thức H(x) = $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ thì P(x) là đa thức “đối xứng”.

a) Gọi $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ và $Q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$ là hai đa thức đối xứng.

Khi đó P(x).Q(x) = $(a_n x^n + ... a_1 x + a_0)(b_m x^m + ... + b_1 x + b_0)$ = $c_{m+n} x^{m+n} + ... + c_1 x + c_0$

Đồng nhất hệ số, có $c_0 = a_0 b_0$ và $c_{m+n} = a_n b_m$ => $c_0 = c_{m+n}$

Tương tự: $C_{m+n-1} = a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m = a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1$

Ta chứng minh: $c_k = c_{m+n-k}$

Có $c_k = a_0 b_k + ... + a_k b_0$ và $c_{m+n-k} = a_n.b_{b-k} + ... + a_{n-k} b_m = c_k$ => đpcm

b) Gọi z là một nghiệm của P(x) => z là nghiệm của H(x)

=> $z^{n+1} - 1 = 0$ và dễ thấy z = 1 không phải là nghiệm

Do đó z = -1 hoặc z là nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$

Nếu z = -1 thì P(x) có nhân tử là x + 1 là đa thức đối xứng

Nếu z là nghiệm phức khác – 1 thì P(x) cũng có nghiệm là $\bar{z}$

Khi đó P(x) có nhân tử là $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z.\bar{z} = x^2 - (z + \bar{z}) + 1$ cũng là đa thức đối xứng. Do vậy P(x) là tích của các đa thức đối xứng nên nó đối xứng.

Câu 5: (1, 0 điểm) Cho số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng số ab là số lớn nhất không thể viết được dưới dạng $ax + by$ với x, y nguyên dương.

1) Ta chứng minh ab không phân tích được dạng trên

Giả sử tồn tại x, y nguyên dương sao cho $ab = ax + by$ => b | ax => b | x (Do (a,b) =1)

Và do x nguyên dương nên $x \geq b$. Mà $y \geq 1$ => $ax + by \geq ab + b$ => vô lí

2) Ta chứng minh mọi số nguyên dương n > ab đều có thể viết được dạng trên

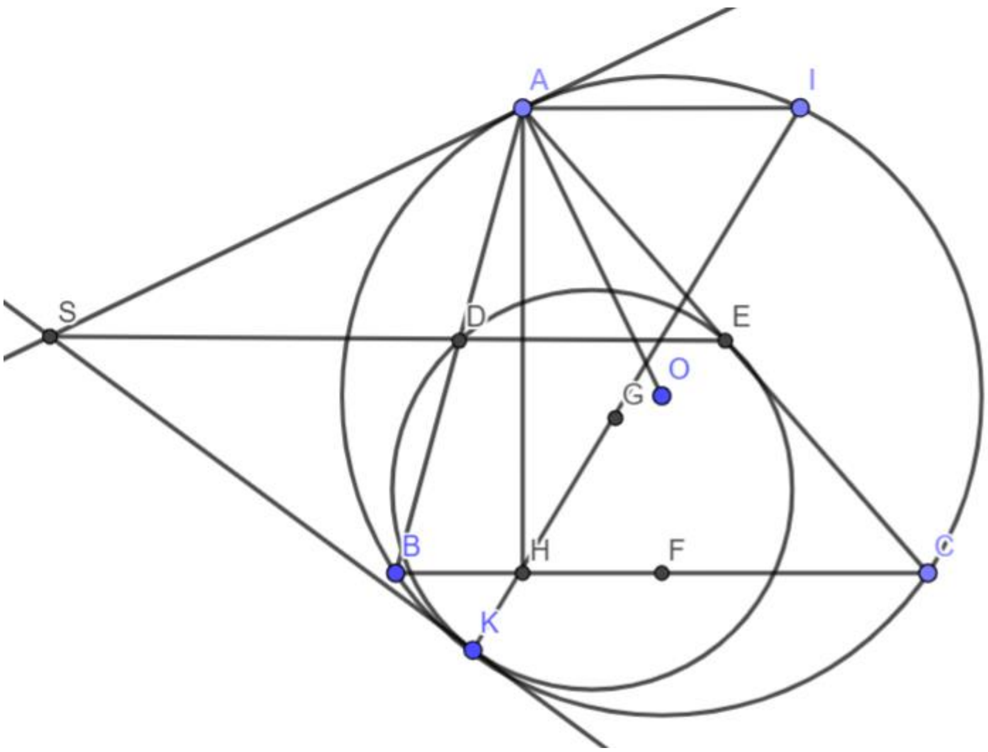
Vì (a,b) = 1 => {a; 2a;…;ba} là hệ thặng dư đầy đủ mod b

- ⇨ Tồn tại số c = xa $(1 \leq kx \leq b)$ sao cho $n \equiv ka\ (mod\ b)$
- ⇨ $n - xa = yb$. Mà n > ab => yb > ab – xa ≥ 0 => $y > 0$
- ⇨ n $= xa + yb$ với x, y nguyên dương => đpcm

Câu 6: (2, 5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi D và E là trung điểm AB, AC. Một đường tròn (w) qua D, E và tiếp xúc (O) tại K khác A. Tiếp tuyến tại K cắt DE tại S.

c) CMR: SA là tiếp tuyến của (O).

d) Gọi H là chân đường cao từ A xuống BC . Chứng minh rằng KH đi qua trọng tâm tam giác ABC.



a) Xét đường tròn (O), (w) và đưòngt tròn (ADOE) có SK là trục đẳng phương của (w) và (O), SDE là trục đẳng phương của (ADOE) và (w) => S là tâm đẳng phương của 3 đường tròn

Mà (O) và (ADOE) tiếp xúc nhau tại A => SA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

b) KH cắt (O) tại I.

Vì SDE là đường trung trực của AH => SH = SA = SK => A, H, K thuộc đường tròn (S; SA)

Có $\angle AHK = 180^0 - \frac{\angle ASK}{2} = 90^0 + \frac{\angle AOK}{2} = 90^0 + \angle AIK$ => $\angle HAI = 90^0$ => AI // DE // BC

⇨ AICB là hình thang cân

Gọi G là trọng tâm ABC, F là trung điểm BC. Có OF là trung trực AI => AI = 2HF

Lại có AG = 2GF và A, G, F thẳng hàng =>H, G, I thẳng hàng

Như vậy K, G, H thẳng hàng.