SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN II**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**NĂM HỌC 2022 - 2023**
NGUYỄN TRÃI	**MÔN: TOÁN 11**

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: **(2,0 điểm)**

a) Tìm điều kiện của m để hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+m}$ nghịch biến trên (3; $+\infty$).

b) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+4$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A; B; C sao cho ABDC là hình thoi với D(0; -3) và A thuộc trục tung.

Câu 2: (1, 0 điểm) Cho hình chóp SABC có SA = SB = SC = a và các số đo góc $\angle ASB=60^0;\angle BSC=90^0;\angle CSA=120^0$. Gọi M, N, P là trung điểm AB, BC, CA. E và F là hình chiếu của P lên SM và SN. Chứng minh rằng SB vuông góc EF.

Câu 3: (2, 0 điểm) Tìm tất cả hàm $f:R\to R$ thỏa mãn:

$$f(xf(x)+f(x).f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1,\forall x,y\in R.$$

Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường EF cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại M và N.

a) BE, CF cắt (O) tại H và J. CMR bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IHJ bằng bán kính đường tròn (O).

b) Gọi $I_B;I_C$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc B và C. CMR: I_BI_C ; EF; BC đồng quy.

c) Chứng minh rằng $I_C;I_B;N;M$ cùng thuộc một đường tròn.

d) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN gấp hai lần bán kính đường tròn (O).

Câu 5: (2,0 điểm) Cho $n=16^{3^a}-4^{3^a}+1$ với a là một số nguyên dương. Chứng minh $2^{n-1}-1$ chia hết cho n.

Hướng dẫn:

Câu 1: **(2, 0 điểm)**

a) Tìm điều kiện của m để hàm số $y=\frac{x-1}{x+m}$ nghịch biến trên (3; $+\infty$)

ĐKXĐ: $x\neq -m$

Để hàm số xác định trên $(3;+\infty)$ thì $-m\leq 3$ hay $m\geq -3$

Để hàm số nghịch biến thì $y'=\frac{m+1}{(x+m)^2}\leq 0$ và $y'=0$ tại một số điểm hữu hạn trên $(3;+\infty)$

Nếu $m=-1$ thì $y'=0,\forall x\neq -m$ và $y=1$ là hàm hằng trên tập xác định.

Do vậy $m<-1$

Vậy $-3\leq m<-1$

b) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+4$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A; B; C sao cho ABDC là hình thoi với D(0; -3) và A thuộc trục tung.

Có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$ = 0 ⇔ $x=0$ hoặc $x^2=m$

Để hàm số có 3 cực trị thì m > 0. Khi đó 3 điểm cực trị là $x=0;x=\sqrt{m};x=-\sqrt{m}$

Thay x = 0 => y = $-2m^2+4$ => A(0; $-2m^2+4$)

Thay x = $\sqrt{m}$ => y = $4-3m^2$ => B($\sqrt{m};-3m^2+4$)

Thay x = $-\sqrt{m}$ => y = $4-3m^2$ => C(-$\sqrt{m};-3m^2+4$)

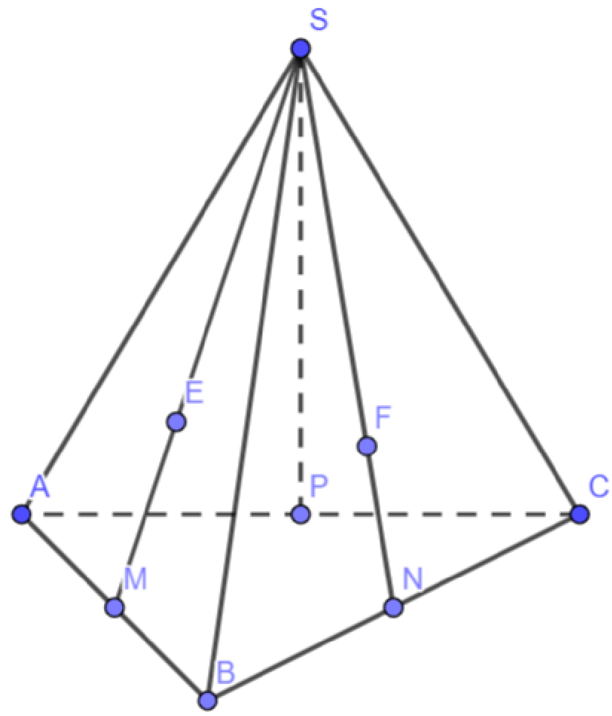
⇨ ABC là tam giác cân tại A có trục Oy làm trục đối xứng

Do đó ABDC là hình thoi ⇔ AD cắt BD tại trung điểm mỗi đường.

Gọi H là trung điểm BC => H(0;$-3m^2+4$)

Để H là trung điểm AD thì $-2m^2+4+(-3)=2.(-3m^2+4)$ ⇔ $m^2=\frac{7}{4}$ => $m=\frac{\sqrt{7}}{2}$ vì m > 0.

Câu 2: (1, 0 điểm) Cho hình chóp SABC có SA = SB = SC = a và các số đo góc $\angle ASB = 60^0; \angle BSC = 90^0; \angle CSA = 120^0$. Gọi M, N, P là trung điểm AB, BC, CA. E và F là hình chiếu của P lên SM và SN. Chứng minh rằng SB vuông góc EF.



Tính được AB = a, BC = $a\sqrt{2}, CA = a\sqrt{3}$

Nên ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ => ABC vuông tại B

- ⇨ P là tâm ngoại tiếp (ABC)

Vì SA = SB = SC nên SP $\perp$ (ABC)

Vì SAB, SBC là các tam giác cân tại S nên SE vuông góc AB tại trung điểm M, SF vuông góc BC tại trung điểm N.

Có PM $\perp$ AB, SP $\perp$ AB nên AB $\perp$ (SPM)

- ⇨ AB $\perp$ PE

Lại có PE $\perp$ SM => PE $\perp$ (SAB) => PE $\perp$ SB

CMTT: PF $\perp$ SB => SB $\perp$ (HEF) => SB $\perp$ EF.

Câu 3: (2, 0 điểm) Tìm tất cả hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(xf(x)+f(x).f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1,\forall x,y\in R$$

Thay x = 0 => $f(f(0)f(y)+y-1)=f(0)+y-1$ (1)

$f(0)+y-1$ chạy hết tập R nên f là toàn ánh, do đó tồn tại c sao cho f(c) = 0

Thay x = c => $f(y-1)=f(cy)+y-1$

Thay y = 1 vào biểu thức trên, ta được $f(0)=f(c)+1-1$ = 0

Thay f(0) = 0 lại vào (1), ta được $f(y-1)=y-1$ hay $f(x)=x,\forall x\in R$. Thử lại thỏa mãn.

Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường EF cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại M và N.

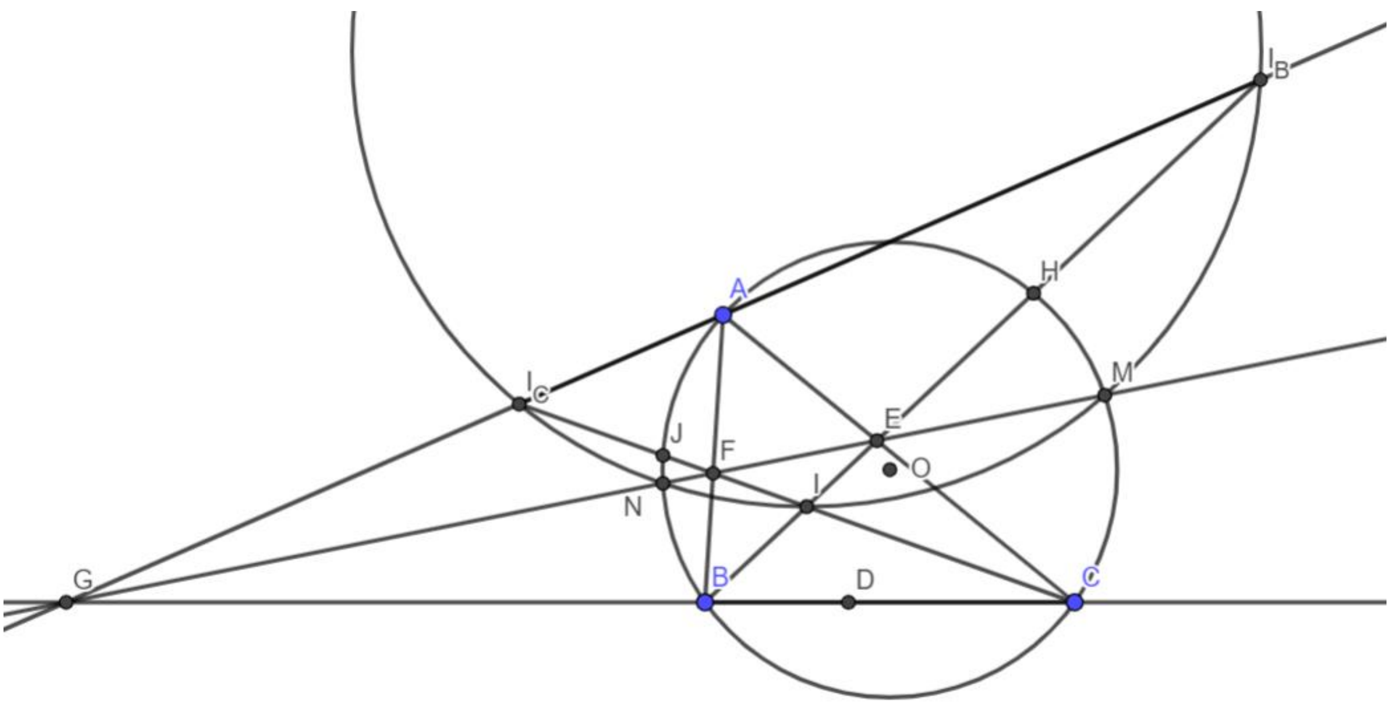
a) BE, CF cắt (O) tại H và J. CMR bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IHJ bằng bán kính đường tròn (O).

Gọi bán kính của (O) là R.

Có H và J là điểm chính giữa cung AC và AB như hình vẽ

Bổ đề quen thuộc là HA = HC = HI, JA = JB = JI

Áp dụng ĐL sin: $2R_{IJH} = \dfrac{IH}{sin\angle HJI} = \dfrac{HC}{sin\angle HAC}$ = 2R => dpcm



b) Gọi $I_B;I_C$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc B và C. CMR: I_BI_C ; EF; BC đồng quy.

I_BI_C chính là phân giác góc ngoài của góc A.

AD, BE, CF đồng quy, EF cắt BC tại G => (GD,BC) = -1

Phân giác góc ngoài của A cắt BC tại G’ => (G’DBC) = -1 => G trùng G’

=> I_BI_C ; EF; BC đồng quy.

c) Chứng minh rằng $I_C; I_B; N; M$ cùng thuộc một đường tròn.

$BI_B; BI_C$ là phân giác góc trong và góc ngoài của góc B nên $\angle I_B B I_C = 90^0$

CMTT $\angle I_B B I_C = 90^0$ => $I_B I_C CB$ là tứ giác nội tiếp

- ⇨ $GI_B.GI_C = GB.GC = GM.GN$ => đpcm

d) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN gấp hai lần bán kính đường tròn (O).

Ta sẽ CM (IMN) chính là (II_BI_CMN)

Có EM.EN = EA.EC = $EI.EI_B$ => M; N; I; I_B cùng thuộc một đường tròn

Kết hợp với ý c ta có điều trên.

Xét phép vị tự tâm I tỉ số k = 2 biến H thành I_B ; biến J thành I_C

- ⇨ Biến đường tròn ngoại tiếp (IJH) thành đường tròn ngoại tiếp (II_BI_C)

Do đó bán kính đường tròn (IMN) chính là bán kính đường tròn (II_BI_C) và nó gấp đôi bán kính đường đường tròn (O)

Câu 5: (2,0 điểm) Cho $n = 16^{3^a} - 4^{3^a} + 1$ với a là một số nguyên dương. Chứng minh $2^{n-1} - 1$ chia hết cho n.

Đặt $4^{3^a} = x$ thì $n = x^2 - x + 1$. Ta cần chứng minh $2^{x^2-x} - 1$ chia chết cho $x^2 - x + 1$

Có $x^3 + 1 \vdots x^2 - x + 1$ => $2^{2.3^{a+1}} + 1 \vdots$ n => $2^{4.3^{a+1}} - 1 \vdots n$

Ta chỉ cần CM: $x^2 - x \vdots 4.3^{a+1}$

Có $x^2 - x = 4^{3^a}.(4^{3^a} - 1)$

Theo LTE, $v_3(4^{3^a} - 1) = v_3(4-1) + v_3(3^a)$ = a + 1 => $4^{3^a} - 1 \vdots 3^{a+1}$ => $4^{3^a}.(4^{3^a} - 1) \vdots 4.3^{a+1}$

Ta có đpcm