SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN III
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN: TOÁN 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (2, 0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thỏa mãn:

$$f(x+f(y)) = y + f(f(f(x))), \forall x, y \in Z$$

Câu 2: (2, 0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AC và BC lần lượt là (AC): $x+2y-10=0$ và (BC): $x-3y=5$. Biết M(1;2) là trung điểm AB. Tìm tọa độ A, B, C.

Câu 3: (2, 0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). AI, BI, CI cắt BC, CA, AB tại D, E, F. EF cắt BC tại G và J là trung điểm BC.

a) Chứng minh rằng: GD.GJ = GB.GC
b) GA cắt lại (O) tại M, MO cắt lại (O) tại N, MD cắt lại (O) tại H. Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHJ.

Câu 4: (2, 0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho $\frac{a^n+1}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên với mọi n $\in$ N.

Câu 5: (2, 0 điểm) Đếm số hoán vị $(a_1; a_2; ...; a_{2022})$ của {1; 2; 3;...; 2022} sao cho mỗi số xuất hiện đúng 1 lần và $a_{i+1} - a_i \le 1, \forall 2 \le i \le 2021$.

Hướng dẫn:

Câu 1: Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thỏa mãn: $f(x+f(y)) = y + f(f(f(x))), \forall x, y \in Z$

Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$ => $f(x+f(y_1)) = f(x+f(y_2))$ =>
$y_1 + f(f(f(x))) = y_2 + f(f(f(y))) \Rightarrow y_1 = y_2$ => f là đơn ánh

Thay y = 0: $f(x+f(0)) = f(f(f(x)))$ => $x + f(0) = f(f(x))$

Thay x = 0 vào biểu thức trên: $f(0) = f(f(0))$ => $f(0) = 0$ => $f(f(x)) = x$

Thay vào ta có: $f(x+f(y)) = y + f(x)$

Thay y bởi $f(y)$ ta được $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in Z$

Đây là PT hàm Cauchy quen thuộc trên Z, ta được kết quả $f(x) = ax, \forall x \in Z$

Thay vào $f(f(x)) = x$ ta được a = 1 hoặc a = -1

Thử lại: Với a = 1 thì $f(x) = x$ thỏa mãn phương trình: x + y = y + x

Với a = -1 thì $f(x) = -x$ thỏa mãn: $-(x-y) = y - x$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in Z$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in Z$

Câu 2: (2, 0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AC và BC lần lượt là (AC): $x + 2y - 10 = 0$ và (BC): $x - 3y = 5$. M(1;2) là trung điểm AB. Tìm tọa độ A, B, C.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 8; y = 1$ => C(8;1)

Vì A thuộc (AC): $x + 2y - 10 = 0$ nên có thể giả sử A(10-2a; a)

Vì M(1; 2) là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_B + 10 - 2a = 2 \\ y_B + a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2a - 8 \\ y_B = 4 - a \end{cases}$

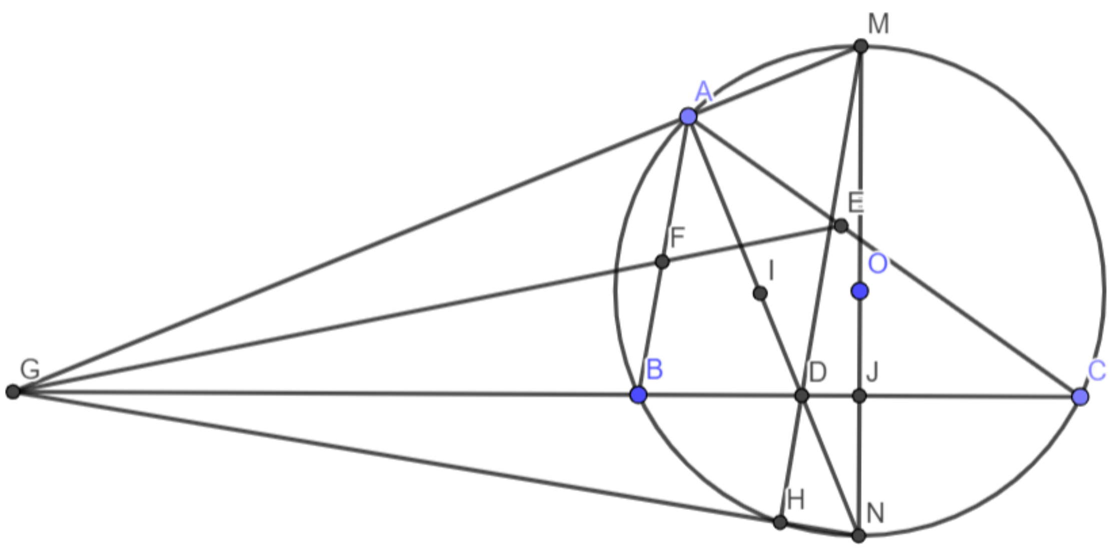
Mà B thuộc (BC) nên $(2a - 8) - 3(4 - a) = 5 \Leftrightarrow 5a - 25 = 0 \Leftrightarrow a = 5$

- ⇨ A(0;5) và B(2;-1)

Câu 3: (2, điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). AI, BI, CI cắt BC, CA, AB tại D, E, F. EF cắt BC tại G và J là trung điểm BC

c) Chứng minh rằng: GD.GJ = GB.GC
d) GA cắt lại (O) tại M, MO cắt lại (O) tại N, MD cắt lại (O) tại H. Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHJ.

a) Vì AD, BE, CF đồng quy tại I và EF cắt BC tại G nên (GDBC) = -1



Mà J là trung điểm BC nên GD.GJ = GB.GC

b) Vì (GDBC) = -1 => (AG, AD, AB, AC) = -1 => AG là phân giác góc ngoài của $\angle BAC$ => GA cắt (O) tại M là điểm chính giữa cung BC chứa A.

⇨ N là điểm chính giữa cung BC không chứa A và A, D, N thẳng hàng

Xét tam giác GMN có GJ vuông góc MN, NA vuông góc MG (Do MN là đường kính) => D là trực tâm GMN => MD vuông góc GN

Mà MH vuông góc HN (do MN là đường kính) => G, H, N thẳng hàng

Khi đó có bổ đề quen thuộc: Tam giác GMN có đường cao GJ, MH, NA cắt nhau tại trực tâm D thì D là tâm nội tiếp của AHJ

Câu 4: (2, 0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho $\frac{a^n+1}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên với mọi n $\in$ N.

Có $a^n+1=2u_n^3$ với u_n là số tự nhiên

Gọi p là một ước nguyên tố lẻ của $a+1$

Theo LTE: $v_p(a^n+1)=v_p(a+1)+v_p(n)$

Theo dữ kiện đề bài thì $v_p(a^n+1)$ chia hết cho 3

Mà $v_p(a+1)$ không đổi, ta có thể chọn được n sao cho $v_p(a+1)+v_p(n)$ không chia hết cho 3 => Mâu thuẫn

Do đó $a+1=2^k$. Thay vào ta có: $(2^k-1)^n+1=2u_n^3$

- Nếu k = 1 => a = 1 (thỏa mãn)
- Nếu k > 1. Chọn n = 2 ta được $(2^k-1)^2+1=2u^3$

⇨ $2^{2k-1}-2^k+1=u^3$ ⇔ $2^k(2^{k-1}-1)=(u-1)(u^2+u+1)$

Mà u lẻ => $u-1$ chẵn và u^2+u+1 lẻ

⇨ $\begin{cases} u-1 \;\vdots\; 2^k \\ 2^{k-1}-1 \;\vdots\; u^2+u+1 \end{cases}$ => $2^k \le u-1 < u^2+u+1 \le 2^{k-1}-1$ => Vô lí

Vậy a = 1

Câu 5: (2, 0 điểm) Đếm số hoán vị $(a_1;a_2;...;a_{2022})$ của {1; 2; 3;...; 2022} sao cho mỗi số xuất hiện đúng 1 lần và $a_{i+1}-a_i \le 1, \forall 2 \le i \le 2021$.

Gọi số hoán vị thỏa mãn đề bài của {1;2;…;n} là u_n

Ta quan tâm đến vị trí của số n

Giả sử $a_i=n$. Vì $a_i-a_{i-1}\le 1$ => $n-a_{i-1}\le 1$ dó đó $a_{i-1}=n-1$.

Làm tương tự: $a_{i-2}=n-2; a_{i-3}=n-3$,.... Như vậy, các vị trí từ a_1 đến a_i được xác định duy nhất, nên số hoán vị trong trường hợp này chính là số hoán vị của $n-i$ số còn lại, số hoán vị này chính là u_{n-i}

Đặc biệt, khi $a_n=n$ thì có đúng 1 hoán vị là (1;2;...;n)

Như vậy ta có công thức truy hồi: $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}+...+u_1+1$

Với $u_1 = 1; u_2 = 2$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n = 2^{n-1}$

Như vậy: $u_{2022} = 2^{2021}$