SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ HAI
NĂM HỌC 2022-2023
Môn: Toán 10
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm)

Tìm các số nguyên dương $(a;n)$ thỏa mãn phương trình $5^a.3=2^{4.n!}-1$

Câu 2. (3 điểm)

a) Cho $x;y;z$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

b) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}^+, N=\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{a^2+c^2}{b^2+ac}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của N.

Câu 3. (3 điểm)

a) Cho tam giác ABC, có $AB=8, AC=9, BC=10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

b) Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,AD và H,K là trực tâm của các tam giác ABE,CDE.
Chứng minh $HK\perp IJ$

c) Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AB,AC tại D và E. Gọi P là một điểm bên trong tam giác ADE, F và G là giao của DE với BP và CP. Đường tròn tâm (O) ngoại tiếp tam giác PDG, đường tròn tâm (I) ngoại tiếp tam giác PEF cắt nhau tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $AQ\perp OI$

Câu 4. (2 điểm)

Có bao nhiêu cách phân tích 6^9 thành tích của 3 số nguyên dương, biết các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

+) Xét $n=1$. Khi đó $a=1$.

+) Xét $n=2$ thì $2^8-1 \vdots 17$ nên không thỏa mãn.

+) Xét $n \ge 3$. Khi đó $v_3(2^{4.n!}-1)=v_3(2^4-1)+v_3(n!) \ge 2$.

Như vậy vế phải chia hết cho 9 còn vế trái thì không (mâu thuẫn).

Vậy bộ số duy nhất thỏa mãn là $(1;1)$.

Câu 2:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{yz+yx}+\frac{z^2}{xz+yz} \ge \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)} \ge \frac{3}{2}$$

b) Ta có $N \ge \dfrac{2\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2+2c^2}+\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)}{a^2+2b^2+c^2}+\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)}{2a^2+b^2+c^2}$

Đặt $\left(a^2+b^2;b^2+c^2;c^2+a^2\right)=(x;y;z)$. Khi đó $N \ge 2\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right) \ge 3\cdot\dfrac{3}{2}=3$

Câu 3:

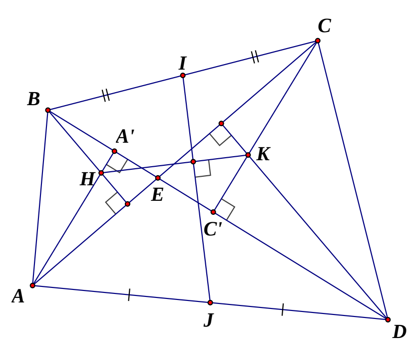
a) Ta có $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{83}{160}$

Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác ABM, ta có

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos B=8^2+7^2-2.8.7.\dfrac{83}{160}=\dfrac{549}{10}$.

Vậy $AM=3\sqrt{6,1}$

b)



Hạ AA', CC' lần lượt vuông góc BD, ta có:

$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

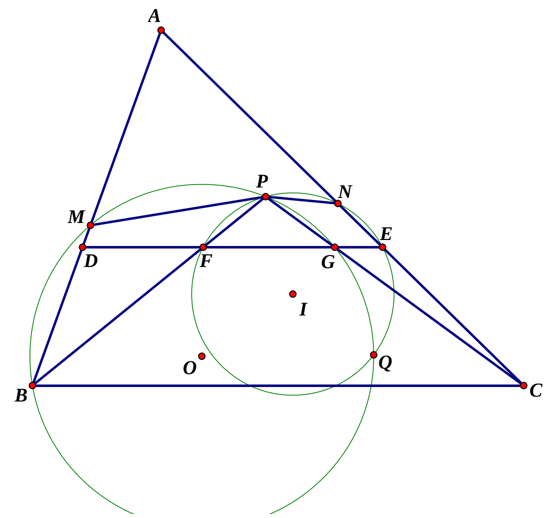
Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$

suy ra $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}$

Thành tử $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}.\left(\dfrac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}\right) = 0$

Vậy $HK \perp IJ$

c)



Gọi M là giao điểm thứ hai của AB và (PDG), N là giao thứ hai của AC và (PFG).

Ta có $AMP = PGD$ và $PGD = PCB$ (đồng vị), suy ra $AMP = PCB$, suy ra BMPC nội tiếp. Chứng minh tương tự PNCB nội tiếp.

Suy ra BMNC nội tiếp, suy ra $\overline{AM}.\overline{AB} = \overline{AN}.\overline{AC}$. Mà $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ (định lý Thales)

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AD} = \overline{AN}.\overline{AE}$

Do đó A thuộc trục đẳng phương PQ của (PDG) và (PEF) suy ra $AQ \perp OI$.

Câu 4:

Xét phân tích $6^9 = (2^{a_1}.3^{b_1})(2^{a_2}.3^{b_2})(2^{a_3}.3^{b_3})$ với $\begin{cases} a_i, b_i \in N \\ a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$

Với mỗi $a_1 \in N, 0 \leq a_1 \leq 9$, có $10 - a_1$ cách chọn số a_2, để $a_1 + a_2 \leq 9$

từ đó chọn $a_3 = 9 - a_1 - a_2$.

Vậy số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) là 10+9+....+1 = 55 cách;

Suy ra số cách chọn các bộ (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là 55.55 cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

$$6^9 = (2^3.3^3)(2^3.3^3)(2^3.3^3)$$

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

$6^9 = (2^a.3^b)(2^a.3^b)(2^{9-2a}.3^{9-2b})$ và (a ; b) # (3 ; 3).

Khi đó a ∈ {0; 1; 2; 3; 4} ; b∈ {0; 1; 2; 3; 4 } và (a ; b) # (3 ; 3)

→ số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.

Vậy số cách phân tích là: $1 + 24 + (55 \times 55 - 24 \times 3 - 1): 6 = 517$ cách